Ο θείος Πέτρος και η Εικασία του Γκόλντμπαχ

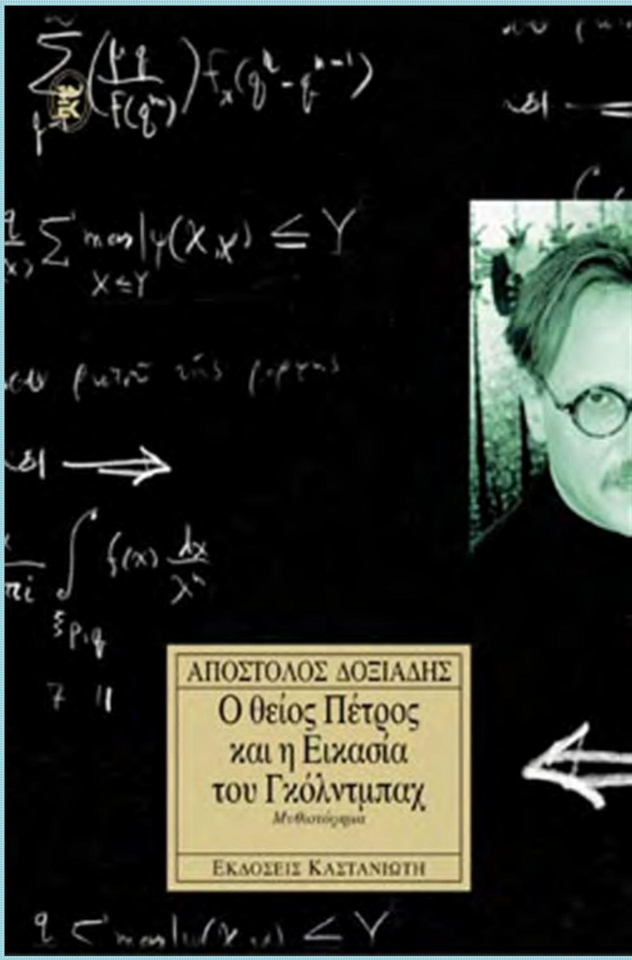
Απόστολος Δοξιάδης

Περιεχόμενα:

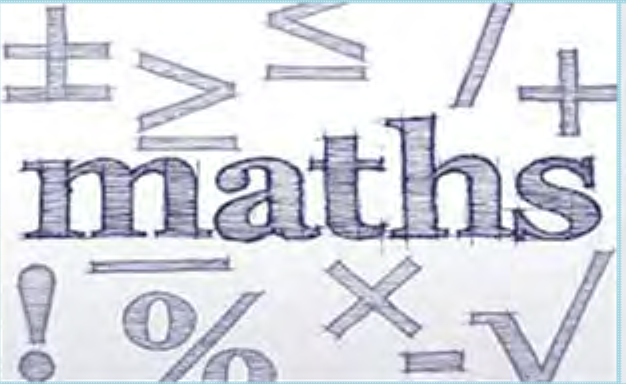
- Περίληψη του βιβλίου
- Τι είναι τα Μαθηματικά;
- Ποια είναι η σχέση της «εικασίας» και του «θεωρήματος»;
- Ποιοι είναι οι πρώτοι αριθμοί;
- Christian Goldbach και η εικασία του
- Kurt Gödel και τα Θεωρήματα της Μη Πληρότητας
- Η συστηματικότητα των πρώτων αριθμών και η Υπόθεση Riemann
- Γνωστοί Μαθηματικοί

Το μυθιστόρημα με λίγα λόγια

Ο θείος Πέτρος ήταν ένας «αποτυχημένος της ζωής», όπως συνεχώς έλεγαν οι πρεσβύτεροι της οικογένειας Παπαχρήστου. Ο ανιψιός του όμως διαψεύδει αυτή τη φήμη όταν ανακαλύπτει πως ο θείος του ήταν κάποτε ένας ιδιοφυής, φημισμένος μαθηματικός που αποφάσισε να αφιερώσει την ζωή του στην «Εικασία του Γκόλντμπαχ». Ένα πρόβλημα που ταλαιπωρούσε πολλές γενιές μαθηματικών και αποτέλεσε βάση για τη συνέχεια τόσο της ιστορίας όσο και της ζωής του ανιψιού.



Τι είναι Μαθηματικά;



«Για πες μου, λοιπόν», ήταν η πρώτη ερώτηση, *«εσύ τι νομίζεις ότι είναι Μαθηματικά;» (σελ.42)*

«…Να τα πραγματικά Μαθηματικά δεν έχουν καμία σχέση με τις εφαρμογές ή με τους υπολογισμούς που μαθαίνεις στο σχολείο. Αποτελούν αφηρημένα διανοητικά κατασκευάσματα που – τουλάχιστον για όσο διάστημα ασχολείται μαζί τους ο μαθηματικός– δεν άπτονται στο παραμικρό του πραγματικού κόσμου». (σελ. 44)

Γιατί μαθαίνουμε Μαθηματικά;

Τα μαθηματικά είναι παντού γύρω μας.

Από την Αρχαία Αίγυπτο μέχρι και σήμερα αποτελούν βάση σε πολλούς τομείς.

Δίνουν λύση σε πλήθος καθημερινών προβλημάτων.

Κάθε είδος φυσικής πραγματικότητας περιέχει κάποια μαθηματική θεωρία.

ΘΕΩΡΗΜΑ

- Είναι μια πειστική παρουσίαση ότι κάποια μαθηματική πρόταση είναι απαραίτητα ορθή (μέσα στα αποδεκτά πλαίσια του πεδίου των μαθηματικών)
- Η απόδειξη παράγεται αναγωγικά και όχι εμπειρικά.
- Πρέπει να δείχνει ότι μια πρόταση είναι αληθής για όλες τις περιπτώσεις που εφαρμόζεται, χωρίς καμία εξαίρεση.

ΕΙΚΑΣΙΑ

- Μια πρόταση χωρίς απόδειξη για την οποία πιστεύεται ή υπάρχουν ισχυρές υποψίες ότι ισχύει.
- Παραδείγματα:

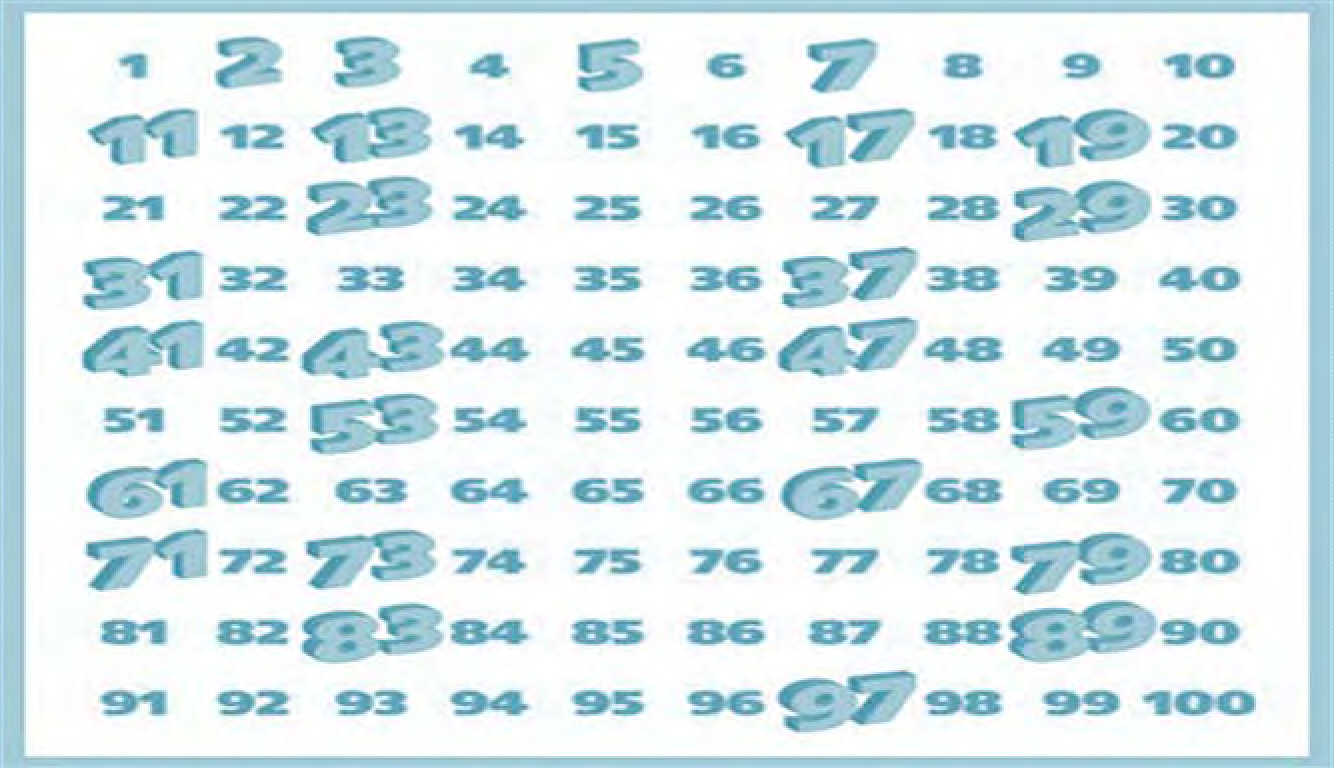
  -Εικασία του Goldbach

  -Η υπόθεση του Riemann

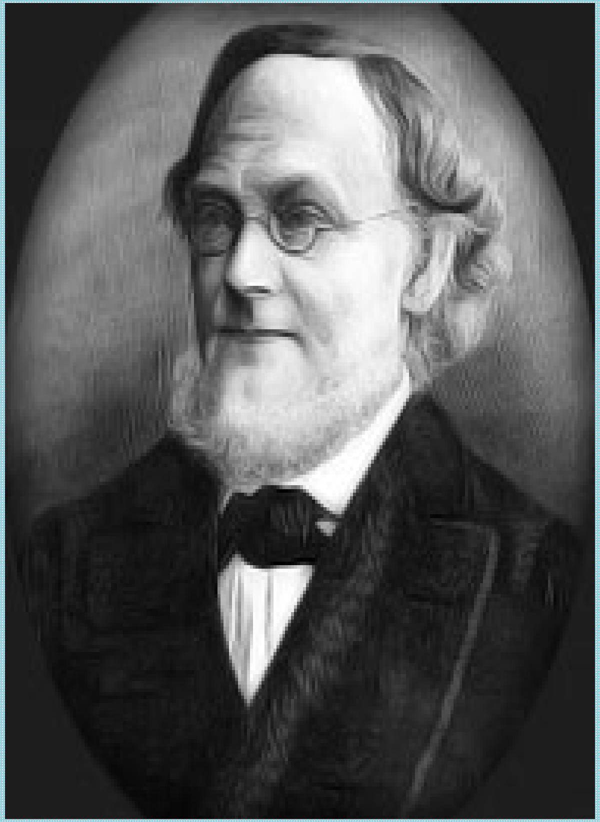
  -Η εικασία των Διδύμων Πρώτων

Πρώτοι Αριθμοί

Πρώτος ονομάζεται ένας φυσικός αριθμός μεγαλύτερος της μονάδας με την ιδιότητα οι μόνοι φυσικοί διαιρέτες του να είναι η μονάδα και ο εαυτός του.



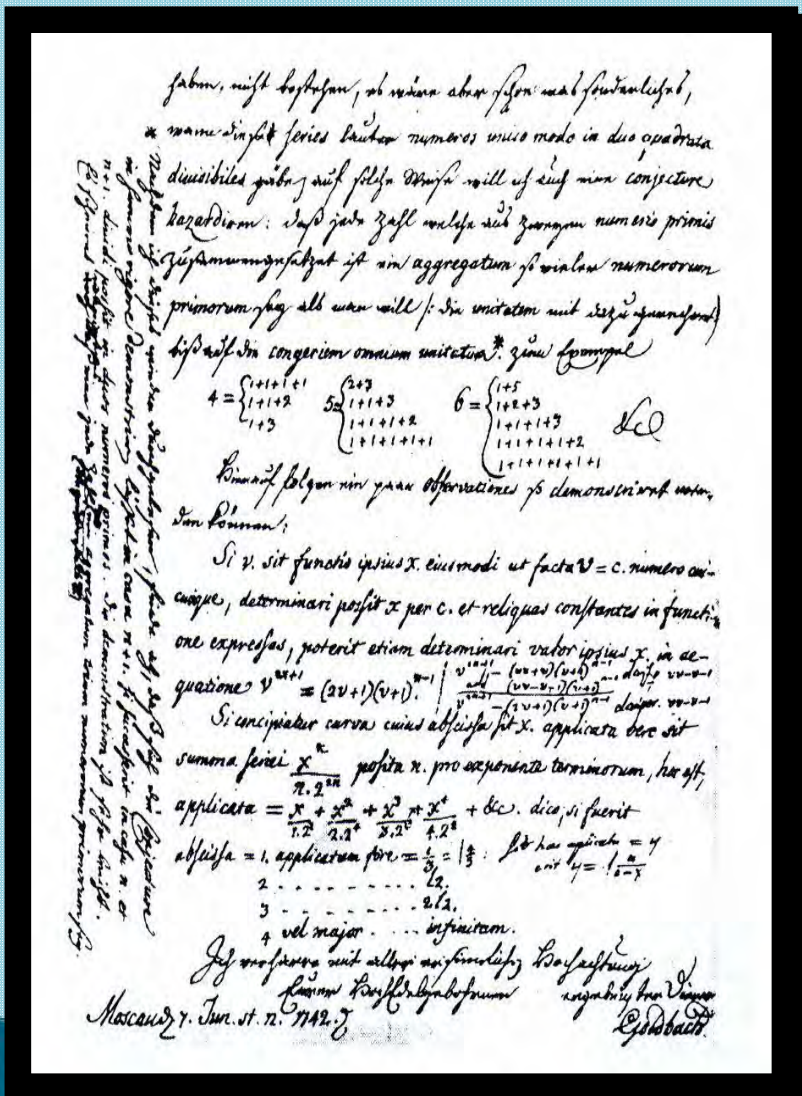
Christian Goldbach (1690-1764)



Ο Κρίστιαν Γκόλντμπαχ ήταν Γερμανός μαθηματικός. Σπούδασε νομικά στο πανεπιστήμιο του Κένιξμπεργκ, αλλά στη συνέχεια έδειξε ενδιαφέρον για τα μαθηματικά. Υπήρξε φίλος του Μπερνούλι και του Όιλερ και δημοσίευσε πολλές εργασίες σχετικά με τη θεωρία των σειρών και των εφαρμογών της στις εξισώσεις. Μελέτησε επίσης και απέδειξε θεωρήματα των τέλειων δυνάμεων, όπως το θεώρημα Γκόλντμπαχ– Όιλερ, και πρόσφερε κάποια αποτελέσματα στην ανάλυση.

Ο Γκόλντμπαχ είναι κυρίως γνωστός για την αλληλογραφία του με τον Λάιμπνιτς, τον Όιλερ και τον Μπερνούλι. Σε μία από τις επιστολές του προς τον Όιλερ το 1742 πρότεινε μία υπόθεση που έμεινε γνωστή ως «Η εικασία του Γκόλντμπαχ».

Η Εικασία του Goldbach



Γράμμα Goldbach
προς Euler (1742)

Κάθε άρτιος αριθμός μεγαλύτερος του 2 είναι το άθροισμα δύο πρώτων αριθμών.

Κάθε περιττός αριθμός μεγαλύτερος του 5 είναι το άθροισμα τριών πρώτων αριθμών.

Προσπάθειες Απόδειξης

- Ο Euler δεν ασχολήθηκε σοβαρά με την απόδειξή της. Την κληροδότησε στις νεότερες γενιές μαθηματικών, που προσπάθησαν να βρουν μια αλυσίδα λογικών συλλογισμών που αποδεικνύουν την αλήθεια της.
- Υπάρχει ένας μεγάλος αριθμός από διαδεδομένες αποδείξεις της εικασίας του Γκόλντμπαχ, από τις οποίες όμως καμία δεν έχει γίνει ακόμα αποδεκτή από την μαθηματική κοινότητα.
- Το όριο για το οποίο έχει ελεγχθεί η εικασία μέχρι το 2012 είναι: $4 * 10^{18}$

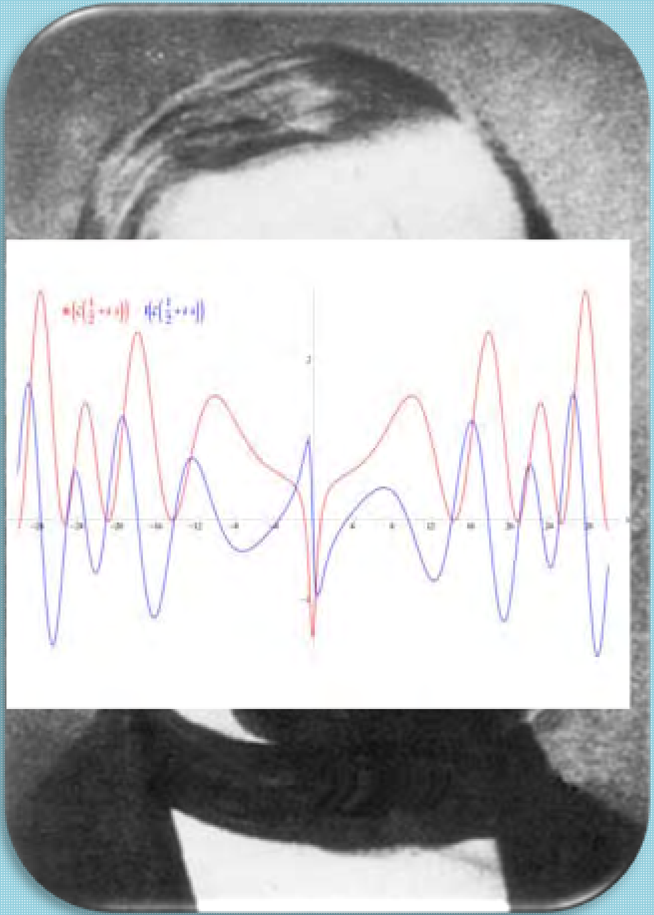
Υπάρχει συστηματικότητα στην κατανομή των πρώτων αριθμών;

Η ακολουθία των πρώτων αριθμών αρχίζει με τους 2,3,5,7,11,13,17…. Όσο όμως προχωράμε η συχνότητα εμφάνισης των πρώτων αριθμών όλο και μικραίνει, δεν παύει όμως να παρουσιάζει μια συστηματοποίηση. Υπάρχουν, ωστόσο,

μικρές αποκλίσεις.

Το 1859 ο Bernhard Riemann υπέθεσε ότι θα μπορούσε να τις περιγράψει επακριβώς, αν κατάφερνε να αποδείξει την ύπαρξη μιας ξεχωριστής ιδιότητας για τις τιμές που μηδενίζουν μια συγκεκριμένη συνάρτηση.

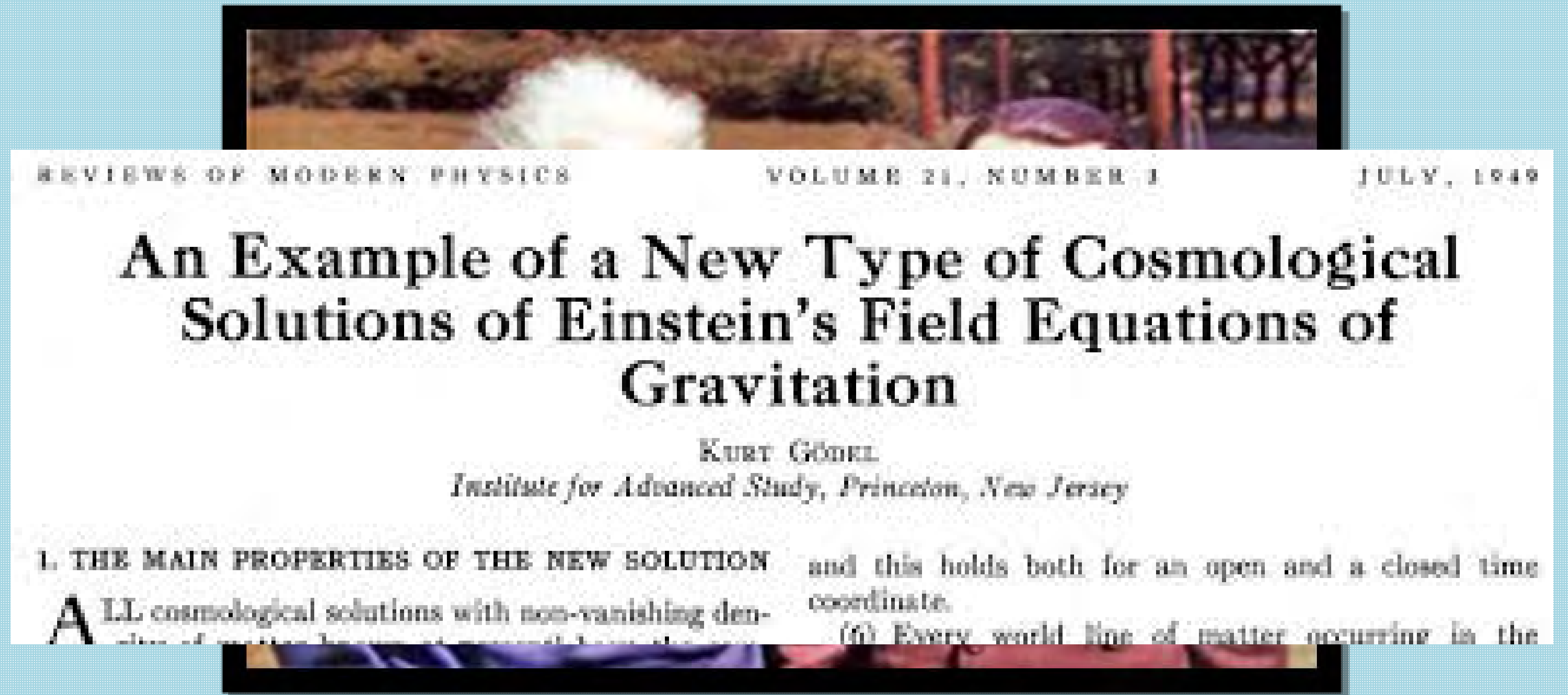
ΥΠΟΘΕΣΗ RIEMANN



Βρήκε, λοιπόν, μια μιγαδική συνάρτηση [γνωστή από την εποχή του Euler] που ονομάστηκε ζήτα συνάρτηση του Riemann ζ(s) και ορίζεται για όλους τους μιγαδικούς αριθμούς που είναι διάφοροι του 1. Η συνάρτηση αυτή μηδενίζεται για όλους τους άρτιους αρνητικούς αριθμούς. Οι τιμές αυτές μηδενισμού είναι οι τετριμμένες της λύσεις. Η υπόθεση του Riemann αφορά τις μη τετριμμένες λύσεις και ισχυρίζεται ότι το πραγματικό μέρος όλων των μη τετριμμένων λύσεων που μηδενίζουν την ζήτα συνάρτηση είναι το ½. Η υπόθεση έχει επαληθευτεί για τις πρώτες 1.500.000.001 λύσεις, αλλά εξακολουθεί να λείπει η τελική απόδειξη.

Kurt Gödel (1906- 1978)

- Γεννιέται το 1906 στην Τσεχία, ένα αγόρι με υψηλότατο βαθμό νοημοσύνης.
- Στα 25 του, επινοεί το θεώρημα της μη πληρότητας.
- Ζει από κοντά την εποχή όπου ο Βιτγκενστάιν βάζει τα θεμέλια του λογικού θετικισμού. Οι Γκέντελ - Βιτγκενστάιν μάλλον ποτέ δεν συμπάθησαν ο ένας τον άλλο. Ο Βιτγκενστάιν, μάλιστα, προσπάθησε να μηδενίσει τη σημαντικότητα του θεωρήματος της μη πληρότητας, χωρίς όμως να καταφέρει τίποτα.



REVIEWS OF MODERN PHYSICS VOLUME 21, NUMBER 3 JULY, 1949

An Example of a New Type of Cosmological Solutions of Einstein's Field Equations of Gravitation

Kurt Gödel

Institute for Advanced Study, Princeton, New Jersey

1. THE MAIN PROPERTIES OF THE NEW SOLUTION

ALL cosmological solutions with non-vanishing den-

and this holds both for an open and a closed time coordinate.

(6) Every world line of matter occurring in the

Το 1949 ο Κούρτ Γκέντελ δημοσίευσε μια εργασία που συγκλόνισε την επιστημονική κοινότητα. Απέδειξε ότι υπάρχουν Κόσμοι (που περιγράφονται από τη θεωρία της σχετικότητας) στους οποίους ο χρόνος δεν υφίσταται (όπως εμείς τον κατανοούμε). Και απέδειξε επίσης πως ο χρόνος δεν υφίσταται ούτε στο δικό μας Κόσμο.

ΘΕΩΡΗΜΑ ΤΗΣ ΜΗ ΠΛΗΡΟΤΗΤΑΣ

Κάθε σύστημα αξιωμάτων περιλαμβάνει προτάσεις τις οποίες δεν μπορούμε να διερευνήσουμε αν είναι αληθείς ή ψευδείς, με τα μέσα που μας δίνει το ίδιο το σύστημα.

Επεξήγηση:

Για να μπορέσουμε ,δηλαδή ,
να αποδείξουμε τις αξιωματικές προτάσεις, πρέπει
να χρησιμοποιήσουμε ένα άλλο σύστημα αξιωμάτων
ακόμα πιο ευρύ, που να περιέχει το προηγούμενο.
Έτσι όμως, μένουμε και πάλι με την αδυναμία να
αποδείξουμε το ευρύτερο αυτό σύστημα, και χρειαζόμαστε
κάτι ακόμα ευρύτερο.
Τελικά φαίνεται ότι η γνώση μας για το κάθε τι
πάντα θα απαιτεί περισσότερα στοιχεία, τα οποία
θα βρίσκονται εκτός του συστήματος
που μελετάμε.

ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ

Με τα Θεωρήματα της Μη Πληρότητας, ο Γκέντελ:

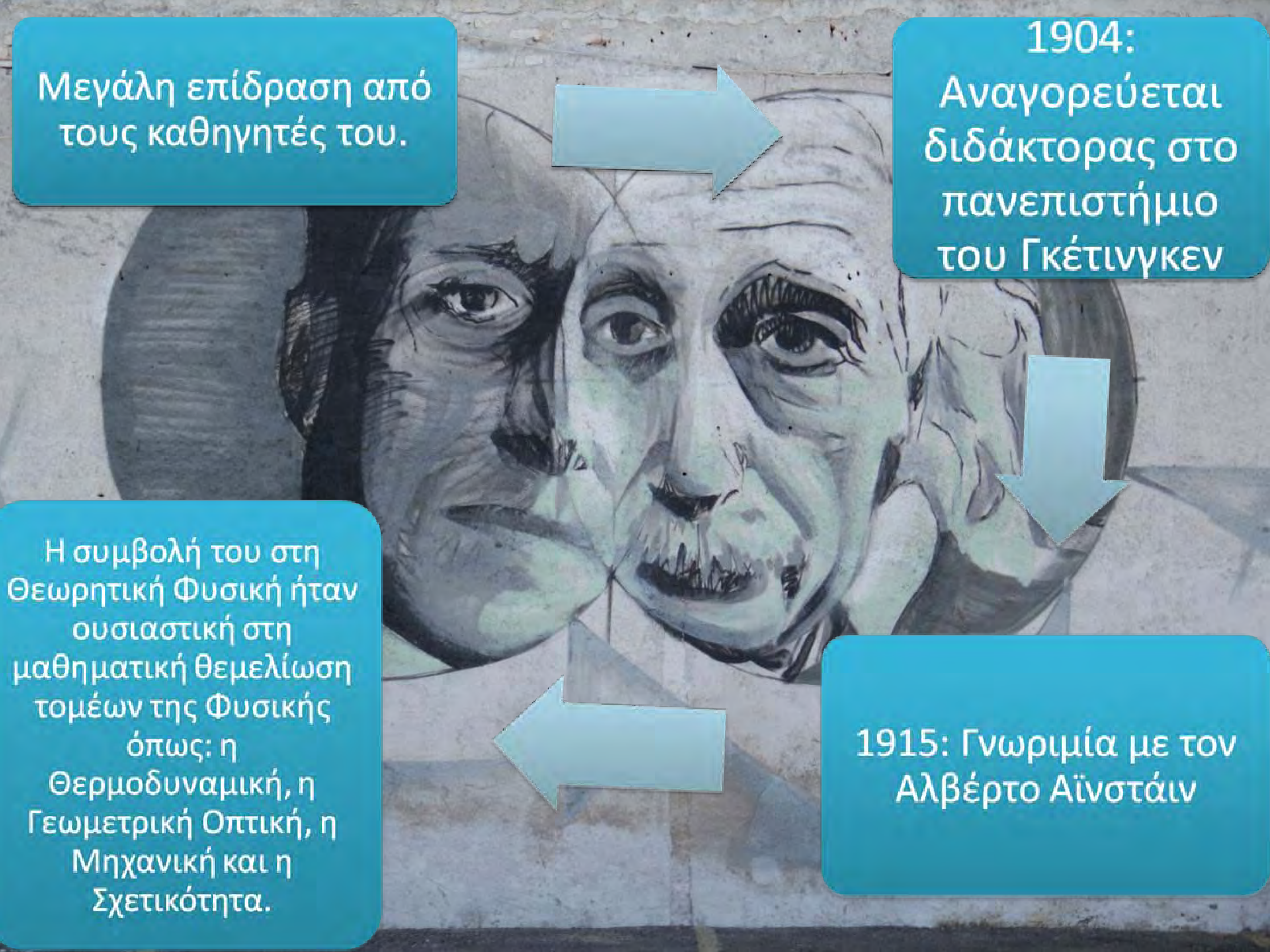
- Έθεσε όρια στην αποδεικτική δύναμη της Λογικής. Έδειξε ,δηλαδή, πως δεν μπορεί να υπάρξει βεβαιότητα στα μαθηματικά.

- Έδειξε ότι σε κάθε θεωρία, όσο καλά δομημένη κι αν είναι, με όσα μη-αντιφατικά αξιώματα κι αν εξοπλισθεί, θα μείνουν πάντα <u>αλήθειες μη-αποδείξιμες.</u>

Γνωστοί Μαθηματικοί

Κωνσταντίνος Καραθεοδωρή (1873–1950)

- Ο Καραθεοδωρή ήταν κορυφαίος Έλληνας μαθηματικός που διακρίθηκε σε παγκόσμιο επίπεδο.
- Παρακολούθησε μαθήματα από μεγάλους μαθηματικούς.
- Το 1902 ο Καραθεοδωρή πήγε στο πανεπιστήμιο του Γκέτινγκεν, όπου έκανε διδακτορική διατριβή.



Μεγάλη επίδραση από τους καθηγητές του.

1904: Αναγορεύεται διδάκτορας στο πανεπιστήμιο του Γκέτινγκεν

1915: Γνωριμία με τον Αλβέρτο Αϊνστάιν

Η συμβολή του στη Θεωρητική Φυσική ήταν ουσιαστική στη μαθηματική θεμελίωση τομέων της Φυσικής όπως: η Θερμοδυναμική, η Γεωμετρική Οπτική, η Μηχανική και η Σχετικότητα.

Σρινιβάσα Ραμανατζάν

Αποτελεί το αντίστοιχο παράδειγμα με τον Μότσαρτ στη μουσική, αφού έμεινε στην ιστορία ως ένας αυτοδίδακτος Ινδός μαθηματικός. Ο Ραμανατζάν πέθανε σε ηλικία 33 χρόνων και άφησε πίσω του 4.000 πρωτότυπα θεωρήματα, τα οποία μελετώνται και ερευνώνται ως σήμερα!!!

Θεωρείται ο μεγαλύτερος μαθηματικός της Ινδίας, και κατατάσσεται στα καλύτερα «μυαλά» όλων των εποχών στα μαθηματικά, μαζί με τον Αρχιμήδη, τον Νεύτωνα, τον Όιλερ και τον Γκάους.

- Η πραγματική είσοδός του στον κόσμο των μαθηματικών οφείλεται σε ένα βιβλίο του Τζωρτζ Καρ.

- Ονομαζόταν «*Μία σύνοψη αποτελεσμάτων στα καθαρά και εφαρμοσμένα μαθηματικά*» και περιείχε 6.000 θεωρήματα.

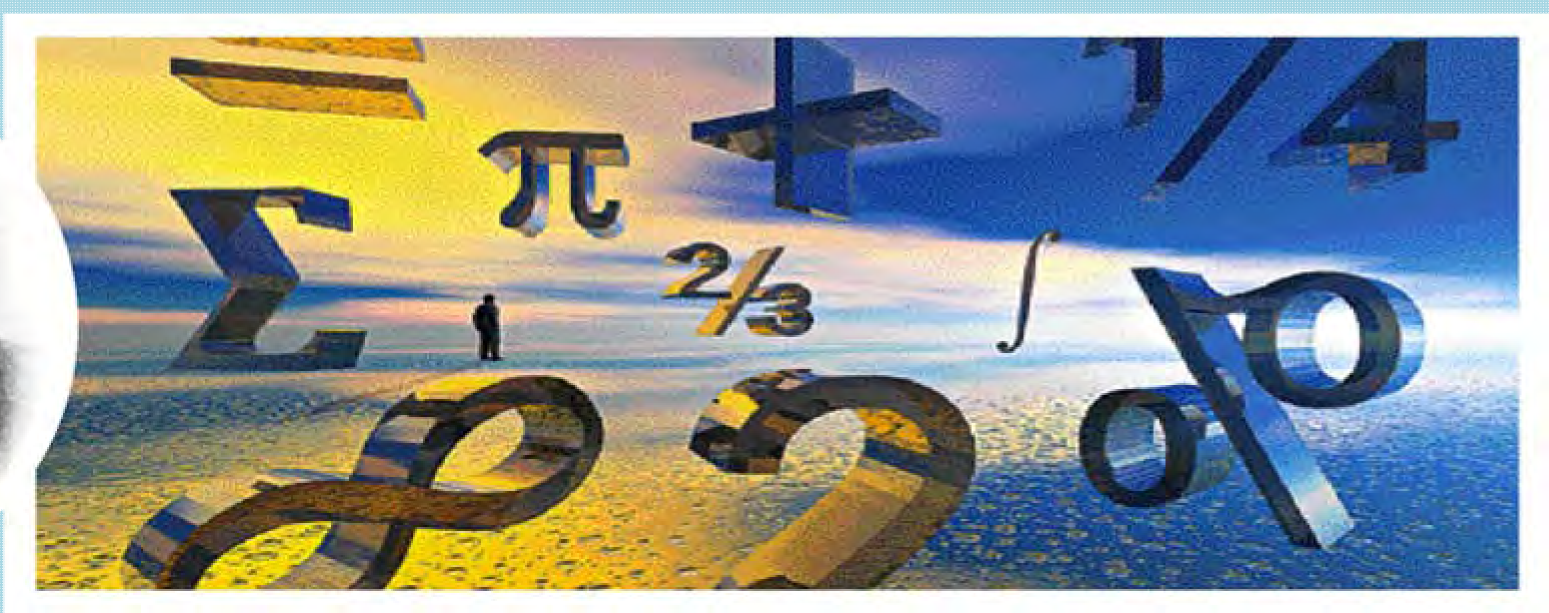
- Ο Ραμανατζάν τα απεδείκνυε με δικό του τρόπο, ισχυριζόμενος ότι η θεά Ναμακάι τον ενέπνεε στα όνειρά του με μαθηματικούς τύπους.

- Λόγω των πολύ καλών επιδόσεών του στο γυμνάσιο κερδίζει υποτροφία.

- Αποτυγχάνει, όμως, στις εξετάσεις εξαιτίας των μαθηματικών και χάνει την υποτροφία αλλά και το πτυχίο του.

Ο Ραμανατζάν έστειλε το 1913 μια επιστολή στον πιο γνωστό Βρετανό μαθηματικό της εποχής, τον Τζ. Χάρντι. Όπως ανέφερε ο Χάρντι αργότερα, η επιστολή περιείχε 120 θεωρήματα χωρίς απόδειξη. Ο Χάρντι εντυπωσιάστηκε και κάλεσε τον Ραμανατζάν στο Κέιμπριτζ το 1914.

Οι δυο τους είχαν στενή συνεργασία. Ο Ραμανατζάν είχε την τάση να επινοεί συνεχώς θεωρήματα χωρίς να τα αποδεικνύει, ενώ ο Χάρντι προσπαθούσε να του διδάξει τη διαδικασία της απόδειξης, η οποία είναι η βάση των μαθηματικών.



Βιβλιογραφία

- Wikipedia
- http://www.tovima.gr
- scitechdaily.com
- www.neotechnology.com
- natureofmathematics.wordpress.com
- http://thalesandfriends.org
- http://mathworld.wolfram.com
- Εγκυκλοπαίδεια: «ΕΛΛΑΔΙΚΗ»
- http://blogs.sch.gr/4gymmyti/files/2013/07/
- petros_material.pdf

ΣΑΣ ΕΥΧΑΡΙΣΤΟΥΜΕ ΠΟΛΥ!

Η ομάδα μας:

- Κατσάρας Φοίβος
- Κωστοπούλου Σοφία
- Μαυρογιάννης Κωνσταντίνος