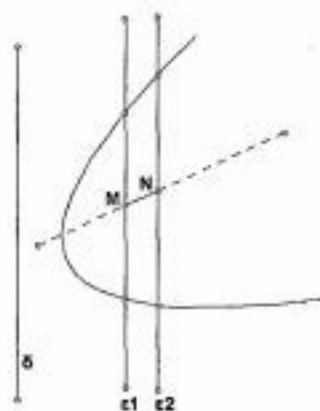


Β. Προσδιορισμός της εστίας της παραβολής από το περίγραμμά της.

Πρόταση 2.

Τα μέσα των χορδών μιας παραβολής που είναι παράλληλες προς μια ευθεία δ βρίσκονται σε ευθεία ϵ που είναι παράλληλη προς τον άξονα συμμετρίας της



Απόδειξη

Εστω $y^2=2px$ η εξίσωση της παραβολής. Αν λ είναι ο συντελεστής διεύθυνσης της ευθείας δ και $A(x_1,y_1), B(x_2,y_2)$ τα σημεία τομής μιας από τις παράλληλες χορδές προς τη δ με την παραβολή θα είναι $\lambda = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$

$y_2^2 = 2px_2, y_1^2 = 2px_1$ και με αφαίρεση κατά μέλη προκύπτει

$$(y_2 - y_1)(y_2 + y_1) = 2p(x_2 - x_1) \Leftrightarrow \lambda \cdot \frac{y_1 + y_2}{2} = p \Leftrightarrow \lambda \cdot y_M = p$$

όπου y_M η τεταγμένη του μέσου της χορδής AB . Άρα y_M είναι σταθερό επομένως το M κινείται σε ευθεία $y = \frac{p}{\lambda} // \chi\chi'$

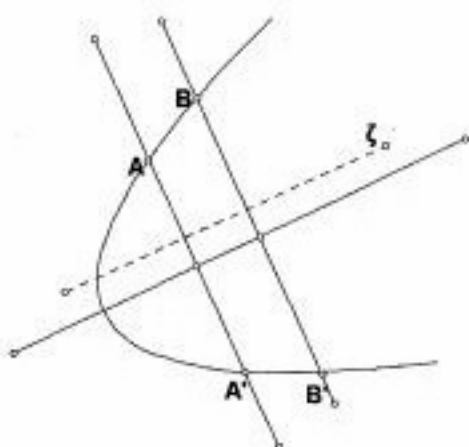
Θεωρούμε επομένως δυο ευθείες $\epsilon_1 // \epsilon_2 // \delta$ και τα μέσα των χορδών της παραβολής M και N αντίστοιχα.

Σύμφωνα με την Πρόταση 2. τα M, N ορίζουν ευθεία παράλληλη προς τον άξονα συμμετρίας της παραβολής.

Εστω δύο παράλληλες χορδές AA' και BB' της παραβολής κάθετες στην ευθεία ζ .

Τα μέσα των χορδών ορίζουν ευθεία που είναι ο άξονας συμμετρίας της παραβολής αφού τότε A, A' και B, B' είναι συμμετρικά ως προς τη ζ .

Το σημείο τομής του άξονα αυτού με την παραβολή είναι η κορυφή της. Εστω καρτεσιανό σύστημα συντεταγμένων με την παραβολή $y^2=2px$ όπως φαίνεται στο διπλανό σχήμα.



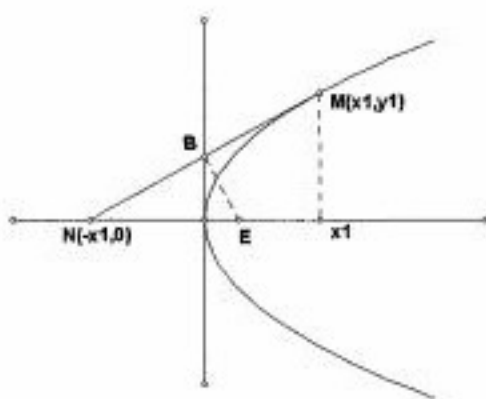
Πρόταση 3.

Εστω $M(x_1,y_1)$ αυτής και $N(-x_1,0)$. Τότε το τμήμα MN εφαπτεται στην παραβολή στο M

Απόδειξη

Η εφαπτομένη της παραβολής στο $M(x_1,y_1)$ είναι $yy_1=p(x+x_1)$

Για $y=0$ έχουμε $x=-x_1$ δηλ. η εφαπτομένη τέμνει τον $\chi\chi'$ στο $N(-x_1,0)$



Η εφαπτομένη της παραβολής στο M τέμνει τον yy' στο $B(0, \frac{px_1}{y_1})$ ή

$$B(0, \frac{y_1}{2})$$

Πρόταση που αποτελεί την εστία της παραβολής

Απόδειξη

Ο συντελεστής διεύθυνσης της εφαπτομένης της παραβολής στο $M(x_1,y_1)$ είναι $\lambda = \frac{p}{y_1}$ άρα ο συντελεστής διεύθυνσης της κάθετου είναι $\lambda' = -\frac{y_1}{p}$

Επομένως η εξίσωση της κάθετης στο B είναι $y - \frac{y_1}{2} = -\frac{y_1}{p}(x-0) \Rightarrow$

$$y = -\frac{y_1}{p}x + \frac{y_1}{2}. \text{ Για } y=0 \text{ έχουμε } \frac{y_1}{p}x = \frac{y_1}{2} \Rightarrow x = \frac{p}{2}$$

Άρα η κάθετη της εφαπτομένης στο σημείο τομής της B με τον yy' τέμνει τον $\chi\chi'$ στο $E(\frac{p}{2}, 0)$ που είναι η εστία της παραβολής.