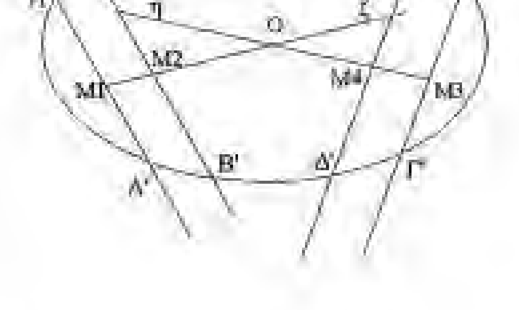
Γ. Προσδιορισμός των εστιών της έλλειψης από το περίγραμμά της.

Πρόταση 5.
Τα μέσα των χορδών μιας έλλειψης που είναι παράλληλες προς μια ευθεία δ βρίσκονται σε ευθεία που διέρχεται από το κέντρο της.
(Ως κέντρο της έλλειψης ορίζουμε το κέντρο συμμετρίας της)

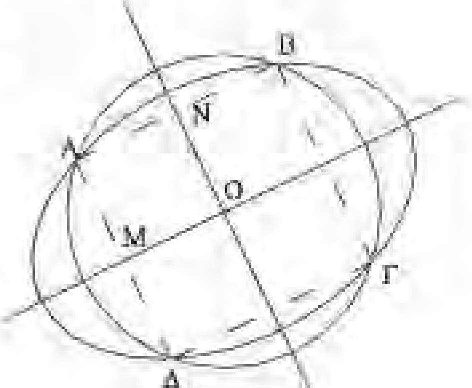
Απόδειξη
Εστω η έλλειψη $\frac{x^2}{\alpha^2}+\frac{y^2}{\beta^2}=1$. Τότε αν λ ο συντελεστής διεύθυνσής της ευθείας δ (με δ μη παράλληλη στον yy') και M_1M_2 μια χορδή παράλληλη προς τη δ με $M_1(x1,y1)$, $M_2(x2,y2)$.
Θα ισχύει $\frac{x_1^2}{\alpha^2}+\frac{y_1^2}{\beta^2}=1$ και $\frac{x_2^2}{\alpha^2}+\frac{y_2^2}{\beta^2}=1$ με αφαίρεση κατά μέλη έχουμε
$\frac{(x_1-x_2)(x_1+x_2)}{\alpha^2}+\frac{(y_1-y_2)(y_1+y_2)}{\beta^2}=0$ όμως $\frac{y_1-y_2}{x_1-x_2}=\lambda$ άρα
$\frac{(x_1+x_2)}{\alpha^2}+\lambda\frac{(y_1+y_2)}{\beta^2}=0 \Leftrightarrow \frac{2x_M}{\alpha^2}+\lambda\frac{2y_M}{\beta^2}=0$ όπου x_M και y_M οι συντεταγμένες του μέσου Μ του τμήματος M_1M_2.
Έτσι το Μ επαληθεύει την εξίσωση της ευθείας $\frac{2}{\alpha^2}x-\lambda\frac{2}{\beta^2}y=0$ που διέρχεται από την αρχή των αξόνων Ο(0,0).

Έστω δύο παράλληλες χορδές ΑΑ' και ΒΒ'. Τα μέσα τους M_1 και M_2 ορίζουν ευθεία (ζ) που διέρχεται από το κέντρο της έλλειψης.
Θεωρώ δύο άλλες παράλληλες χορδές ΔΔ' και ΓΓ'. Τα μέσα M_4, M_3 ορίζουν ευθεία (η) που διέρχεται επίσης από το κέντρο της έλλειψης.
Άρα το σημείο τομής των ευθειών (ζ) και (η) θα είναι το κέντρο της έλλειψης.

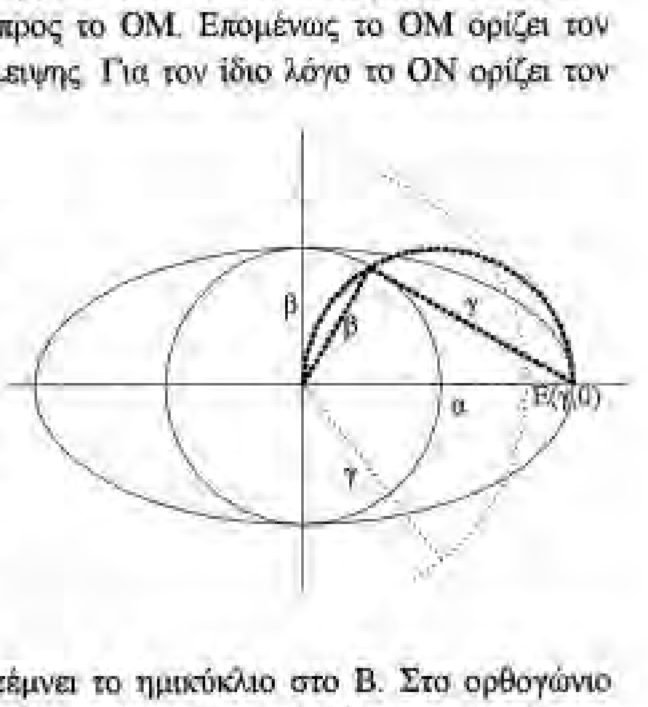


Πρόταση 6.
Ο κύκλος (Ο,R) τέμνει την έλλειψη σε τέσσερα σημεία Α,Β,Γ,Δ που είναι κορυφές ορθογωνίου.

Απόδειξη
Τα σημεία Α, Γ είναι συμμετρικά ως προς το κέντρο Ο της έλλειψης άρα και ως προς τι κέντρο Ο του κύκλου. Επομένως είναι αντιδιαμετρικά.
Για τον ίδιο λόγο και τα σημεία Β,Δ είναι αντιδιαμετρικά.



Τότε ΑΒΓΔ παραλληλόγραμμο αφού οι διαγώνιοί του διχοτομούνται και είναι ίσοι.
Αν Μ είναι το μέσον της χορδής ΑΔ τότε το ΟΜ είναι μεσοκάθετος του ΑΔ. Άρα Α,Δ συμμετρικά ως προς το ΟΜ. Επομένως το ΟΜ ορίζει τον έναν άξονα συμμετρίας της έλλειψης. Για τον ίδιο λόγο το ΟΝ ορίζει τον δεύτερο άξονα συμμετρίας της έλλειψης.
Έστω καρτεσιανό σύστημα συντεταγμένων με την έλλειψη $\frac{x^2}{\alpha^2}+\frac{y^2}{\beta^2}=1$ όπως φαίνεται στο διπλανό σχήμα.
Με γνωστά τα μήκη α,β των δύο ημιαξόνων κατασκευάζω τμήμα γ τέτοιο ώστε $\alpha^2=\beta^2+\gamma^2$
Θεωρούμε το ημικύκλιο διαμέτρου α. Ο κύκλος (Ο,β) τέμνει το ημικύκλιο στο Β. Στο ορθογώνιο τρίγωνο ΟΑΒ είναι ΟΒ=β και ΟΑ=α άρα από το Πυθαγόρειο Θεώρημα ΑΒ=γ



Ο κύκλος (Ο,γ) θα τέμνει τον χχ΄ στα σημεία Ε(γ,0),Ε΄(-γ,0) που είναι οι εστίες της έλλειψης