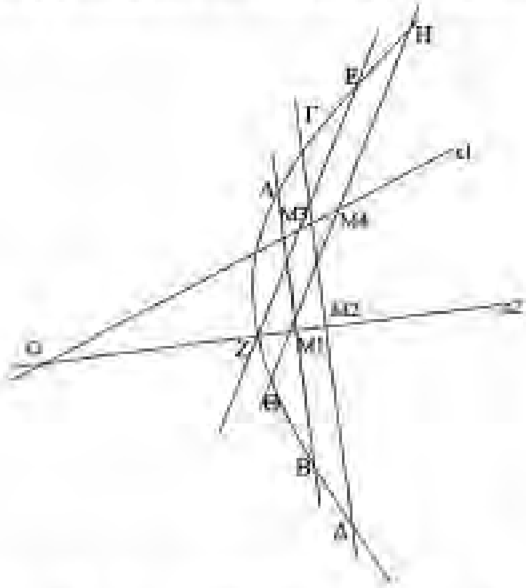
Δ. Προσδιορισμός των εστιών της υπερβολής από το περίγραμμα της.

Πρόταση 7.

Τα μέσα των χορδών μιας υπερβολής που είναι παράλληλες προς μια διεύθυνση δ βρίσκονται σε ευθεία που διέρχεται από το κέντρο της.

(Ως κέντρο της υπερβολής ορίζουμε το κέντρο συμμετρίας της)

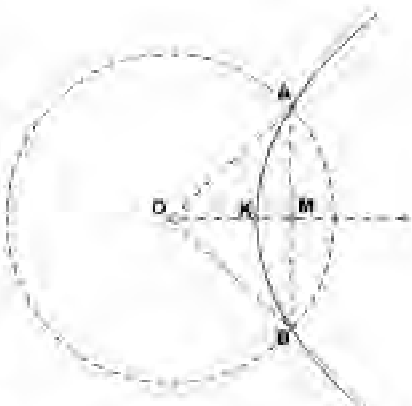


Απόδειξη

Η απόδειξη είναι η ίδια με αυτήν της ΠΡΟΤΑΣΗΣ 5.

Έστω δύο παράλληλες χορδές ΑΒ και ΓΔ της υπερβολής. Τότε τα μέσα τους M_1,M_2 ορίζουν ευθεία ε_1 που διέρχεται από το κέντρο της υπερβολής. Όμοια τα μέσα M_3 και M_4 των ΕΖ και ΗΘ ορίζουν ευθεία ε_2 που διέρχεται από το κέντρο της υπερβολής. Το σημείο τομής των ευθειών ε_1,ε_2 είναι το κέντρο της υπερβολής.

Θεωρούμε κύκλο (Ο,R) που τέμνει την υπερβολή στα Α,Β. Τα Α,Β είναι συμμετρικά ως προς τη μεσοκάθετη ΟΜ του ΑΒ. Άρα ΟΜ είναι ο άξονας συμμετρίας της υπερβολής. Το σημείο τομής της υπερβολής με την ΟΜ είναι η κορυφή της Κ.



Σε ορθογώνιο σύστημα συντεταγμένων ΟΚ=α. Έστω ο κύκλος (Ο,ΟΚ) που τέμνει τον yy΄ στο Λ. Τότε ΛΚ=$\alpha\sqrt{2}$.

Θεωρώ κύκλο (Ο,ΛΚ) που τέμνει τον χχ' στο Μ($\alpha\sqrt{2}$,0). Από το Μ υψώνω κάθετο που τέμνει την υπερβολή στο Δ($\alpha\sqrt{2}$,β) αφού $\frac{x^2}{\alpha^2}-\frac{y^2}{\beta^2}=1$ για x= $\alpha\sqrt{2}$ γίνεται $\frac{2\alpha^2}{\alpha^2}-\frac{y^2}{\beta^2}=1\Rightarrow\ldots\Rightarrow y=\pm\beta$

Έστω Δ΄ η προβολή του Δ στον yy΄ δηλ. Δ΄(0,β). Στο ορθογώνιο τρίγωνο ΟΔ΄Κ ισχύει

$\Delta'K^2=\Delta'O^2+OK^2 \Rightarrow \Delta'K=\sqrt{\beta^2+\alpha^2}=\gamma$

Θεωρώ τον κύκλο (Ο,Δ΄Κ) που τέμνει τον χχ΄ στο Ε(γ,0) και Ε΄(-γ,0) δηλ. τα Ε και Ε΄ είναι οι εστίες της υπερβολής.