Οι Περιοχές των

Μιγαδικών – Πραγματικών Ριζών

της Εξίσωσης 2ου Βαθμού

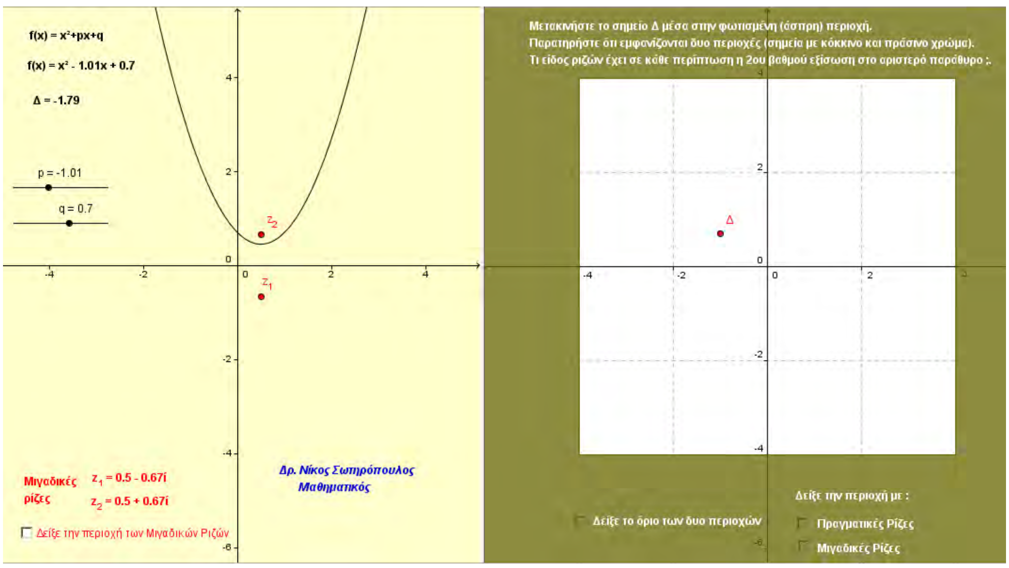
Δρ. Νίκος Σωτηρόπουλος

Εισαγωγή

Οι εξισώσεις 2ου βαθμού (τριώνυμα) έχουν πάντα δύο λύσεις-ρίζες (που μπορεί να συμπίπτουν). Μέχρι να μάθουμε για τους μιγαδικούς αριθμούς, δεν μπορούμε να βρούμε πάντοτε τις λύσεις αυτές. Το άρθρο αυτό μας βοηθάει να παρακολουθούμε (οπτικά) τις λύσεις των δευτεροβάθμιων εξισώσεων στο καρτεσιανό επίπεδο.

Στη συνέχεια, γίνεται ο έλεγχος των ριζών της εξίσωσης $x^2 + px + q = 0$ (1). Για λόγους ευκολίας έχουν διαιρεθεί οι συντελεστές της γενικής μορφής της δευτεροβάθμιας εξίσωσης $\alpha x^2 + \beta x + \gamma = 0, \quad \alpha \neq 0$ με το α και έτσι έχει προκύψει η εξ.(1). Επίσης, για λόγους ευκολίας έχουμε πάρει το $\alpha > 0$ στην ακολουθούμενη διαδικασία και για λόγους χώρου στην εφαρμογή αυτών με το πρόγραμμα Geogebra τα p και q παίρνουν τιμές στο διάστημα [-4, 4].

Μπορείτε να βλέπετε τι συμβαίνει στις διάφορες περιπτώσεις που αναφέρονται στη συνέχεια του άρθρου κάνοντας κλικ στην επόμενη εικόνα.



Δείτε τι συμβαίνει στη γραφική παράσταση της συνάρτησης $y = x^2 + px + q$ (2)

1. εάν κρατήσετε σταθερό το *p* και αλλάζετε το *q*
2. εάν κρατήσετε σταθερό το *q* και αλλάζετε το *p*

Μπορείτε να αλλάζετε τις τιμές των p και q στο αριστερό παράθυρο σύροντας με το ποντίκι τους αντίστοιχους δρομείς. Ακόμα, μπορείτε να αλλάζετε ταυτόχρονα τις τιμές των p και q μετακινώντας το σημείο Δ στο δεξιό παράθυρο της εφαρμογής Geogebra. Παρατηρείστε ότι στο δεξιό παράθυρο εμφανίζονται δύο περιοχές (πράσινη και κόκκινη). **Μπορείτε να βρείτε ποια γραμμή οριοθετεί τις δύο περιοχές και τι είδος ριζών έχει σε κάθε περιοχή η δευτεροβάθμια εξίσωση;**

Στην **1η** περίπτωση, εάν κρατήσετε δηλαδή σταθερό το *p* και αλλάζετε το *q*, η γραφική παράσταση της συνάρτησης (2) μετακινείται παράλληλα στον άξονα ψ'ψ. Ο αριθμός των σημείων τομής του γραφήματος της (2) με τον άξονα χ'χ είναι 0, 1 ή 2 .Ο αριθμός αυτός σχετίζεται με την διακρίνουσα $\Delta = p^2 - 4q$ (3) της εξίσωσης.

- Αν $\Delta > 0$, υπάρχουν 2 πραγματικές διαφορετικές λύσεις $x_1, x_2 = \frac{-p \pm \sqrt{\Delta}}{2}$ και το γράφημα τέμνει τον άξονα χ'χ σε δύο διαφορετικά σημεία.
- Αν $\Delta = 0$, υπάρχει μια διπλή πραγματική λύση $x_1 = x_2 = -\frac{p}{2}$ και το γράφημα εφάπτεται στον άξονα χ'χ.
- Αν $\Delta < 0$, δεν υπάρχουν πραγματικές λύσεις και το γράφημα δεν τέμνει τον άξονα χ'χ. Στην περίπτωση αυτή έχουμε δύο συζυγείς μιγαδικές λύσεις $z_{1,2} = -\frac{p}{2} \pm \frac{\sqrt{-\Delta}}{2} i$

Κάντε μερικές δοκιμές με τις παρακάτω τιμές.

Για $p = 2$ και $q = -3$ είναι $\Delta = 16$ και η εξίσωση έχει λύσεις τις $x_1 = -3$ και $x_2 = 1$.

Για $p = -2$ και $q = 1$ είναι $\Delta = 0$ και η εξίσωση έχει λύσεις $x_1 = x_2 = 1$.

Για $p = 2$ και $q = 3$ είναι Δ = -8 και η εξίσωση δεν έχει πραγματικές λύσεις. Στην περίπτωση αυτή η εξίσωση έχει λύσεις $z_1 = -1 + \sqrt{2} i$ και $z_2 = -1 - \sqrt{2} i$.

Στην **2η** περίπτωση, εάν κρατήσετε δηλαδή σταθερό το *q* και αλλάζετε το *p*, η γραφική παράσταση της συνάρτησης (2) μετακινείται, έτσι ώστε να διέρχεται πάντα από το ίδιο σταθερό σημείο του άξονα ψ'ψ το Κ(0, *q*). Το πλήθος των σημείων τομής του γραφήματος της (2) με τον άξονα χ'χ μπορεί πάλι να είναι 0, 1 ή 2 εξαρτώμενος, όπως και προηγουμένως, από την τιμή της διακρίνουσας Δ.

Ασχοληθείτε λίγο με το δεξιό παράθυρο της εφαρμογής Geogebra. Μετακινώντας το σημείο Δ αλλάζετε ταυτόχρονα τις τιμές των συντελεστών *p* και *q* της εξίσωσης (1). Παρατηρείστε ότι εμφανίζονται δύο περιοχές πράσινη και κόκκινη. **Ποια είναι η εξίσωση της γραμμής που οριοθετεί τις δύο περιοχές; Τι είδος ριζών έχει η δευτεροβάθμια εξίσωση, όταν το σημείο Δ βρίσκεται σε κάθε μια περιοχή;**

Μάλλον… θα έχετε αντιληφθεί τι συμβαίνει!!!

- *Όταν το σημείο Δ(p, q) βρίσκεται στην κόκκινη περιοχή η δευτεροβάθμια εξίσωση δεν έχει πραγματικές ρίζες (έχει δυο συζυγείς μιγαδικές-βλέπε και στο αριστερό παράθυρο), δηλαδή έχουμε* $\Delta < 0 \Leftrightarrow p^2 < 4q$.
- *Όταν το σημείο Δ(p, q) βρίσκεται στην πράσινη περιοχή η δευτεροβάθμια εξίσωση έχει δυο διαφορετικές πραγματικές ρίζες, δηλαδή έχουμε* $\Delta > 0 \Leftrightarrow p^2 > 4q$.
- *Όταν το σημείο Δ (p, q) βρίσκεται στη γραμμή που οριοθετεί τις δυο περιοχές η δευτεροβάθμια έχει μια διπλή πραγματική ρίζα, δηλαδή έχουμε* $\Delta = 0 \Leftrightarrow p^2 = 4q$.