ΠΡΟΤΥΠΟ ΠΕΙΡΑΜΑΤΙΚΟ ΛΥΚΕΙΟ ΑΝΑΒΡΥΤΩΝ

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΚΑΙ ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗΣ ΓΕΝΙΚΗΣ ΠΑΙΔΕΙΑΣ

ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ ΠΡΟΣΟΜΟΙΩΣΗΣ 2014

ΘΕΜΑ 1^o

Α$_1$. Πότε δύο ενδεχόμενα Α και Β ενός δειγματικού χώρου Ω ονομάζονται ασυμβίβαστα; **ΜΟΝΑΔΕΣ 4**

Α$_2$. Πότε μια συνάρτηση f με πεδίο ορισμού Α, ονομάζεται συνεχής; **ΜΟΝΑΔΕΣ 3**

Α$_3$ Αν Α και Β είναι δύο ενδεχόμενα ενός δειγματικού χώρου να αποδείξετε ότι: **ΜΟΝΑΔΕΣ 8**
Αν $A \subseteq B$ τότε $P(A) \leq P(B)$

Α$_4$. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας την ένδειξη **Σωστό** ή **Λάθος** δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση.

α. Αν στη καμπύλη συχνοτήτων μιας κατανομής, το 68% περίπου των παρατηρήσεων βρίσκεται στο διάστημα $(\bar{x}-s, \bar{x}+s)$ τότε η κατανομή αυτή είναι κανονική. **ΜΟΝΑΔΕΣ 2**

β. Η μοναδική συνάρτηση που η παράγωγός της είναι συνx είναι η συνάρτηση f(x) = ημx. **ΜΟΝΑΔΕΣ 2**

γ. Για κάθε ζεύγος παραγωγίσιμων συναρτήσεων f, g ισχύει: **ΜΟΝΑΔΕΣ 2**
$[f(x)+g(x)]' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$

δ. Αν Ω είναι ο δειγματικός χώρος ενός οποιουδήποτε πειράματος τύχης τότε $P(\Omega) = \varnothing$ **ΜΟΝΑΔΕΣ 2**

ε. Ένα δείγμα τιμών μιας μεταβλητής ονομάζεται ομοιογενές όταν ο συντελεστής μεταβολής του CV δεν ξεπερνά το 10% **ΜΟΝΑΔΕΣ 2**

ΘΕΜΑ 2^o

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = (x-2)^3 + 8$ ορισμένη στο σύνολο των πραγματικών αριθμών.

Β$_1$. Να μελετηθεί ως προς την μονοτονία και τα ακρότατα στο σύνολο R **ΜΟΝΑΔΕΣ 5**

Β$_2$. Να αποδείξετε ότι: $(x-2)f''(x) - 2f'(x) = 0$ για κάθε $x \in R$ **ΜΟΝΑΔΕΣ 3**

B_3. Αν η εφαπτομένη της συνάρτησης f στο σημείο $x_o = 3$, συμπίπτει με το πολύγωνο αθροιστικών συχνοτήτων μιας συνεχούς μεταβλητής Χ και οι τιμές x_i της μεταβλητής Χ ανήκουν στο διάστημα [0,10], να βρείτε το μέγεθος του δείγματος της μεταβλητής Χ. **ΜΟΝΑΔΕΣ 8**

B_4. Αν το μέγεθος των τιμών x_i της μεταβλητής Χ είναι ν = 30 και οι παραπάνω τιμές της μεταβλητής Χ ομαδοποιηθούν σε πέντε ισοπλατείς κλάσεις, τότε: **ΜΟΝΑΔΕΣ 9**

α) Να προσδιορίσετε τη μέση τιμή $\overline{x}$ και τη διακύμανση s^2, της κατανομής.

β) Να εξεταστεί το παραπάνω δείγμα ως προς την ομοιογένεια.

γ) Να βρεθεί η μικρότερη τιμή της θετικής ακεραίας σταθεράς c που πρέπει να προσθέσουμε σε κάθε τιμή x_i της μεταβλητής Χ ώστε το δείγμα να γίνει ομοιογενές.

ΔΙΝΟΝΤΑΙ

1. Η διακύμανση των παρατηρήσεων s^2 είναι ίση με: $s^2 = \frac{1}{\nu} \cdot \left\{ \sum_{i=1}^{\nu} x_i^2 \cdot \nu_i - \frac{\left(\sum_{i=1}^{\nu} x_i \cdot \nu_i \right)^2}{\nu} \right\}$

2. $\sqrt{2} \approx 1{,}41$

ΘΕΜΑ 3^o

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{\sqrt{x+1}-1}{x}$

και τα ενδεχόμενα Α, Β του δειγματικού χώρου Ω = {1, 2, 3, 4}. Οι πιθανότητες P(A) και P(A – B) είναι διαφορετικές μεταξύ τους και ανήκουν στο σύνολο

$\Sigma = \left\{ \lim_{x\to 0} f(x),\ \lim_{x\to 3} f(x) \right\}$

Γ_1. Να υπολογίσετε τις πιθανότητες P(A) και P(A – B) **ΜΟΝΑΔΕΣ 8**

Γ_2. Αν Α = {1, 2, 3} με $P(2) = \frac{1}{6}$ και $P(3) = \frac{1}{4}$, να βρείτε:

α) Τις πιθανότητες P(1) και P(4). **ΜΟΝΑΔΕΣ 7**

β) Το ενδεχόμενο Α – Β. **ΜΟΝΑΔΕΣ 4**

γ) Να υπολογίσετε όλες τις δυνατές τιμές της πιθανότητας P(B). **ΜΟΝΑΔΕΣ 6**

ΘΕΜΑ 4ο

Δίνονται οι παρατηρήσεις 1, x_1, x_2, …x_{119} μιας τυχαίας μεταβλητής X οι οποίες αποτελούν διαδοχικούς όρους μιας αριθμητικής προόδου με διαφορά ω = 2, καθώς και η συνάρτηση $f(x)=\dfrac{x-1}{x^2+3}$ με $x\in R$. Έστω ότι για την τυπική απόκλιση s των παραπάνω παρατηρήσεων της τυχαίας μεταβλητής X ισχύει:

$$s=\frac{3}{2}\lim_{x\to 1}\frac{(x^2+3)^2\left(f(x)-f'(x)+\dfrac{4}{(x^2+3)^2}\right)}{x^2-1}$$

Δ1. Να αποδείξετε ότι η μέση τιμή των παραπάνω παρατηρήσεων είναι $\bar{x}$ = 120 και η τυπική απόκλιση s = 3 **ΜΟΝΑΔΕΣ 8**

Δ 2. Αν οι παρατηρήσεις μιας νέας τυχαίας μεταβλητής Y έχουν τιμές $y_i=x_i-6c$ (i = 0, 1, 2,…119, x_o = 1), όπου c η τιμή του μεγίστου της συνάρτησης f, τότε να αποδείξετε ότι: $c=\dfrac{1}{6}$ **ΜΟΝΑΔΕΣ 5**

Δ3. Αν οι τιμές της μεταβλητής Y του $Δ_2$ ερωτήματος ακολουθούν την κανονική κατανομή και επιλέξουμε τυχαία μια από τις παρατηρήσεις y_i (i = 0, 1, 2,…119) αυτής της μεταβλητής, να βρείτε τις πιθανότητες των ενδεχομένων **ΜΟΝΑΔΕΣ 12**

Α: «Η τιμή που επιλέξαμε να είναι μεγαλύτερη από 122»

Β: «Η τιμή που επιλέξαμε να είναι μεταξύ των τιμών 116 και 125 »

Γ: «Η τιμή που επιλέξαμε να είναι τουλάχιστον 128 ή το πολύ 110»

Δ: «Η τιμή που επιλέξαμε να είναι ακριβώς 125»

Δίνεται ότι το άθροισμα $S_ν$ των ν πρώτων όρων αριθμητικής προόδου είναι:

$$\mathbf{S_ν=\frac{ν}{2}\left[2α_1+(ν-1)ω\right]}$$

όπου $α_1$ και ω ο πρώτος όρος και η διαφορά της προόδου.

Να απαντήσετε σε όλα τα θέματα
Ευχόμαστε ΕΠΙΤΥΧΙΑ

ΓΚΥΡΤΗΣ ΑΘΑΝΑΣΙΟΣ
ΚΑΡΔΑΜΙΤΣΗΣ ΣΠΥΡΟΣ
ΜΩΡΟΥ ΑΡΤΕΜΙΣ
ΣΩΤΗΡΟΠΟΥΛΟΣ ΝΙΚΟΣ

ΕΝΔΕΙΚΤΙΚΕΣ ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ ΠΡΩΤΟ

A_4 Λ – Λ – Λ – Λ – Σ

ΘΕΜΑ ΔΕΥΤΕΡΟ

B_1. Η συνάρτηση είναι ορισμένη στο σύνολο των πραγματικών αριθμών με παράγωγο
$f'(x) = 3(x-2)^2$ με $x \in B$

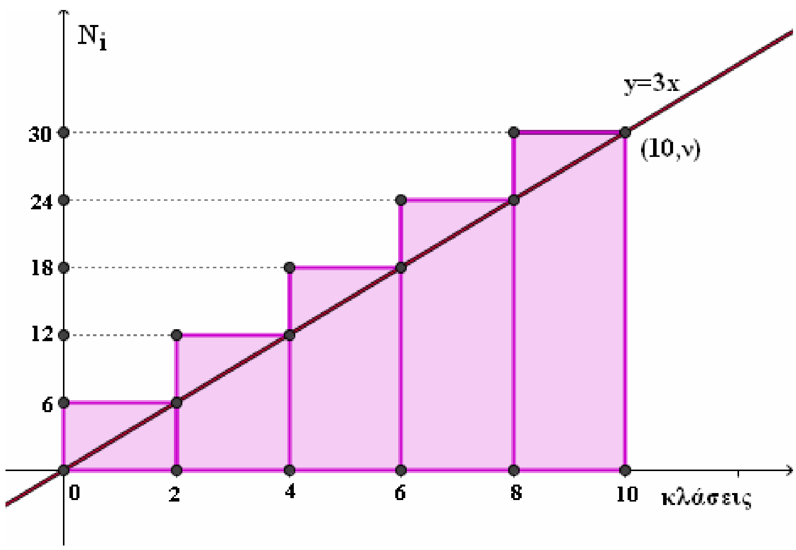
Είναι $f'(x) = 3(x-2)^2 > 0$ για κάθε $x < 2$ και
$f'(x) = 3(x-2)^2 > 0$ για κάθε $x > 2$
και $f'(0) = 0$
Άρα η συνάρτηση είναι γνησίως αύξουσα στα διαστήματα $(-\infty, 2]$ και $[2, +\infty)$ άρα και στο σύνολο των πραγματικών αριθμών αλλά στο σημείο $x_o = 0$ μηδενίζεται, όμως δεν έχει ακρότατο στο σημείο αυτό γιατί η παράγωγος διατηρεί το ίδιο πρόσημο εκατέρωθεν του σημείου μηδενισμού της.

B_2. Είναι $f''(x) = 6(x-2)$, $x \in B$ επομένως έχουμε:

$(x-2)f''(x) - 2f'(x) =$
$= (x-2)\cdot 6(x-2) - 2\cdot 3(x-2)^2 =$
$= 6(x-2)^2 - 6(x-2)^2 = 0$

B_3. Είναι $f(3) = 9$ και $f'(3) = 3$, συνεπώς η εξίσωση της εφαπτομένης της στο σημείο $x_o = 3$ είναι:

$y - f(3) = f'(3)(x-3) \Leftrightarrow y - 9 = 3(x-3) \Leftrightarrow y = 3x$



Από το γεγονός ότι εφαπτομένη της συνάρτησης στο σημείο $x_o = 3$ συμπίπτει με το πολύγωνο αθροιστικών συχνοτήτων της συνεχούς μεταβλητής Χ και ότι η τελευταία κορυφή του πολυγώνου έχει συντεταγμένες $(10,\nu)$ προκύπτει ότι οι συντεταγμένες του σημείου επαληθεύουν τον τύπο της εφαπτομένης, άρα $\nu = 3\cdot 10 = 30$.

Β₄. α) Ομαδοποιώντας τις τιμές σε 5 ισοπλατείς κλάσεις έχουμε ότι:
εύρος R = 10,
αριθμός κλάσεων κ = 5,

άρα το πλάτος c των κλάσεων είναι: $c = \frac{R}{\kappa} = 2$,

οπότε από το παραπάνω πολύγωνο αθροιστικών συχνοτήτων προκύπτει ο παρακάτω πίνακας.

	x_i	N_i	ν_i	$\nu_i x_i$	x_i^2	$\nu_i x_i^2$
[0,2)	1	6	6	6	1	6
[2,4)	3	12	6	18	9	54
[4,6)	5	18	6	30	25	150
[6,8)	7	24	6	42	49	294
[8,10]	9	30	6	54	81	486
			30	150		990

Με βάση τον παραπάνω πίνακα έχουμε:

$$\bar{x} = \frac{1}{\nu} \cdot \sum_{i=1}^{\nu} \nu_i x_i = \frac{1}{30} \cdot 150 = 5 \text{ και}$$

$$S^2 = \frac{1}{\nu} \cdot \left\{ \sum_{i=1}^{\kappa} x_i^2 \nu_i - \frac{\left(\sum_{i=1}^{\kappa} x_i \nu_i \right)^2}{\nu} \right\} = = \frac{1}{\nu} \cdot \sum_{i=1}^{\kappa} x_i^2 \nu_i - \frac{\left(\sum_{i=1}^{\kappa} x_i \nu_i \right)^2}{\nu^2} = \frac{1}{\nu} \cdot \sum_{i=1}^{\kappa} x_i^2 \nu_i - \bar{x}^2 = \frac{1}{30} \cdot 990 - 5^2 = 8$$

Β₄. β) Είναι $S = 2\sqrt{2}$ επομένως $CV = \frac{S}{\bar{x}} = \frac{2\sqrt{2}}{5} \cong 0{,}57$ ή 57% συνεπώς το δείγμα δεν είναι ομοιογενές.

Β₄. γ) Με την πρόσθεση της θετικής σταθεράς c η νέα μέση τιμή $\bar{y}$ και η νέα τυπική απόκλιση S_y είναι: $\bar{y} = \bar{x} + c = 5 + c$ και $S_y = S = 2\sqrt{2}$, το δείγμα θα είναι ομοιογενές όταν για τον νέο συντελεστής μεταβλητότητας CV_y ισχύει:

$$CV_y \le \frac{1}{10} \Rightarrow \frac{S_y}{\bar{y}} \le \frac{1}{10} \Rightarrow \frac{2\sqrt{2}}{5+c} \le \frac{1}{10} \Rightarrow c \ge 23{,}2 \text{ άρα } c = 24$$

ΘΕΜΑ ΤΡΙΤΟ

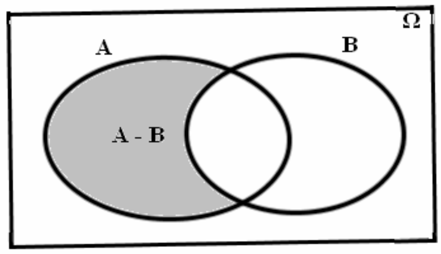
Γ₁. Έχουμε $f(x) = \frac{\sqrt{x+1}-1}{x} = \frac{\left(\sqrt{x+1}-1\right)\left(\sqrt{x+1}+1\right)}{x\left(\sqrt{x+1}+1\right)} = \frac{x}{x\left(\sqrt{x+1}+1\right)} = \frac{1}{\sqrt{x+1}+1}$

Άρα

$$\lim_{x \to 0} f(x) = \lim_{x \to 0} \frac{1}{\sqrt{x+1}+1} = \frac{1}{2} \text{ και}$$

$\lim\limits_{x\to 3} f(x) = \lim\limits_{x\to 3}\dfrac{\sqrt{x+1}-1}{x} = \dfrac{1}{3}$ επομένως είναι $\Sigma = \left\{\dfrac{1}{3}, \dfrac{1}{2}\right\}$

Όμως είναι $A - B \subseteq A$, τότε $P(A - B) \le P(A)$



οπότε συμπεραίνουμε ότι $P(A-B) = \dfrac{1}{3}$ και $P(A) = \dfrac{1}{2}$

Γ$_2$. α) Σύμφωνα με τον αξιωματικό ορισμό της πιθανότητας έχουμε:

$P(A) = P(1) + P(2) + P(3)$

Και με βάση τα δεδομένα έχουμε:

$\dfrac{1}{2} = P(1) + \dfrac{1}{6} + \dfrac{1}{4}$ και τελικά είναι $P(1) = \dfrac{1}{12}$

Αξιοποιώντας εκ νέου τον αξιωματικό ορισμό παίρνουμε

$P(1) + P(2) + P(3) + P(4) = 1$ αφού $\Omega = \{1, 2, 3, 4\}$

Και με βάση τα δεδομένα έχουμε:

$\dfrac{1}{12} + \dfrac{1}{6} + \dfrac{1}{4} + P(4) = 1 \Rightarrow P(4) = \dfrac{1}{2}$

Γ$_2$. β) Το ενδεχόμενο A – B είναι ένα από τα παρακάτω υποσύνολα του συνόλου A

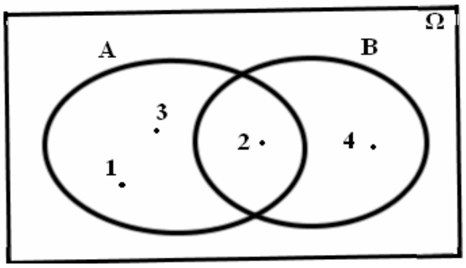
$\varnothing$, $\{1\}$, $\{2\}$, $\{3\}$, $\{1, 2\}$, $\{1, 3\}$, $\{2, 3\}$, A

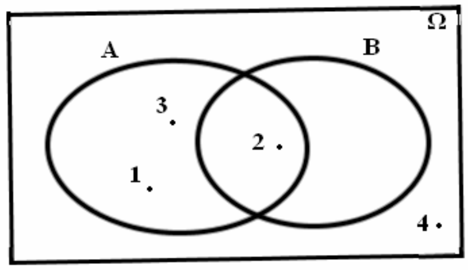
Γνωρίζουμε ότι $P(A - B) = \dfrac{1}{3}$ και βρίσκοντας τις πιθανότητες όλων των παραπάνω υποσυνόλων

$P(\varnothing) = 0$
$P(A) = 1$
$P(\{1\}) = P(1) = \dfrac{1}{12}$
……..
Διαπιστώνουμε ότι

$P(\{1, 3\}) = P(1) + P(3) = \dfrac{1}{12} + \dfrac{1}{4} = \dfrac{1}{3}$
Επομένως $A - B = \{1, 3\}$

$Γ_3$. γ) Με Α = {1, 2, 3} και Α – Β = {1, 3}έχουμε ότι το απλό ενδεχόμενο 2 ανήκει στο σύνολο Β και τα απλά ενδεχόμενα 1, 3 ανήκουν μόνο στο Α. Για το απλό ενδεχόμενο 4 δεν έχουμε πληροφορίες οπότε έχουμε τις περιπτώσεις το 4 να ανήκει στο σύνολο Β ή να μην ανήκει. Τα παραπάνω φαίνονται στα παρακάτω διαγράμματα Venn.





Επομένως

Αν Β = {2}, τότε Ρ(Β) = Ρ(2) = $\frac{1}{6}$

Αν Β = {2, 4}, τότε Ρ(Β) = Ρ({2, 4}) = Ρ(2) + Ρ(4) = $\frac{1}{6}+\frac{1}{2}=\frac{2}{3}$

ΘΕΜΑ ΤΕΤΑΡΤΟ

$Δ_1$. Η μέση τιμή $\overline{x}$ της μεταβλητής Χ είναι:

$$\overline{x}=\frac{1+x_1+x_2+...+x_{119}}{120}=\frac{\frac{120}{2}\left[2\cdot 1+119\cdot 2\right]}{120}=120$$

και για τη τυπική απόκλιση έχουμε:

$$f'(x)=\left(\frac{x-1}{x^2+3}\right)'=\frac{(x-1)'(x^2+3)-(x-1)(x^2+3)'}{(x^2+3)^2}=\frac{-x^2+2x+3}{(x^2+3)^2}, \ x\in R.$$

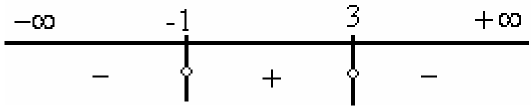
Τότε:

$$\frac{(x^2+3)^2\left(f(x)-f'(x)+\frac{4}{(x^2+3)^2}\right)}{x^2-1}=\frac{(x^2+3)^2\left(\frac{x-1}{(x^2+3)}-\frac{-x^2+2x+3}{(x^2+3)^2}+\frac{4}{(x^2+3)^2}\right)}{x^2-1}=$$
$$=\frac{(x-1)(x^2+3)+x^2-2x-3+4}{x^2-1}=\frac{x^3+x-2}{x^2-1}=\frac{(x-1)(x^2+x+2)}{(x-1)(x+1)}=\frac{x^2+x+2}{x+1}$$

Επομένως έχουμε:

$$s=\frac{3}{2}\lim_{x\to 1}\frac{(x^2+3)^2\left(f(x)-f'(x)+\frac{4}{(x^2+3)^2}\right)}{x^2-1}=\frac{3}{2}\lim_{x\to 1}\frac{x^2+x+2}{x+1}=\frac{3}{2}\cdot\frac{4}{2}=3$$

Δ₂. Η συνάρτηση $f(x)=\dfrac{x-1}{x^2+3}$ έχει παράγωγο $f'(x)=\dfrac{-x^2+2x+3}{(x^2+3)^2}$, $x\in R$ που μηδενίζεται για $x = -1$ ή $x = 3$ και έχει τον παρακάτω πίνακα προσήμου

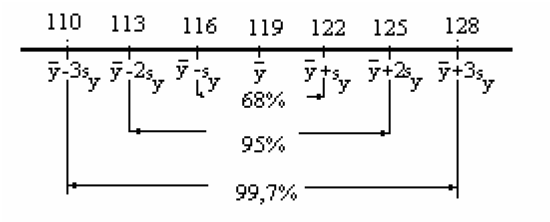


Από όπου προκύπτει ότι η συνάρτηση για $x = 3$ παρουσιάζει μέγιστο, οπότε $c = f(3) = \dfrac{3-1}{3^2+3} = \dfrac{1}{6}$

Δ₃. Για $c = \dfrac{1}{6}$ οι τιμές της μεταβλητής Y είναι $y_i = x_i - 1$ με y_i $(i = 0, 1, 2,\ldots 119)$, τότε η μέση τιμή $\overline{y}$ και η τυπική απόκλιση s_y της μεταβλητής Y είναι:

$\overline{y}=\overline{x}-1=120-1=119$ και
$s_y = s = 3$

επειδή δε η κατανομή είναι κανονική με βάση τη καμπύλη της κανονικής κατανομής



Θα έχουμε:

Για το ενδεχόμενο Α: «Η τιμή που επιλέξαμε να είναι μεγαλύτερη από 122» το ποσοστό των παρατηρήσεων είναι $\left(50-\dfrac{68}{2}\right)$% = 16%, άρα η πιθανότητα του ενδεχομένου είναι P(A) = 0,16

Για το ενδεχόμενο Β: «Η τιμή που επιλέξαμε να είναι μεταξύ των τιμών 116 και 125» το ποσοστό των παρατηρήσεων είναι $\left(\dfrac{68}{2}+\dfrac{95}{2}\right)$% = 81,5%, άρα η πιθανότητα του ενδεχομένου είναι P(B) = 0,815

Για το ενδεχόμενο Γ: «Η τιμή που επιλέξαμε να είναι να είναι τουλάχιστον 128 ή το πολύ 110» το ποσοστό των παρατηρήσεων είναι $(0{,}15+0{,}15)$% = 0,30 %, άρα η πιθανότητα του ενδεχομένου είναι P(Γ) = 0,03

Για το ενδεχόμενο Δ: «Η τιμή που επιλέξαμε να είναι να ακριβώς 125» το ποσοστό των παρατηρήσεων είναι 0 %, άρα η πιθανότητα του ενδεχομένου είναι P(Δ) = 0.