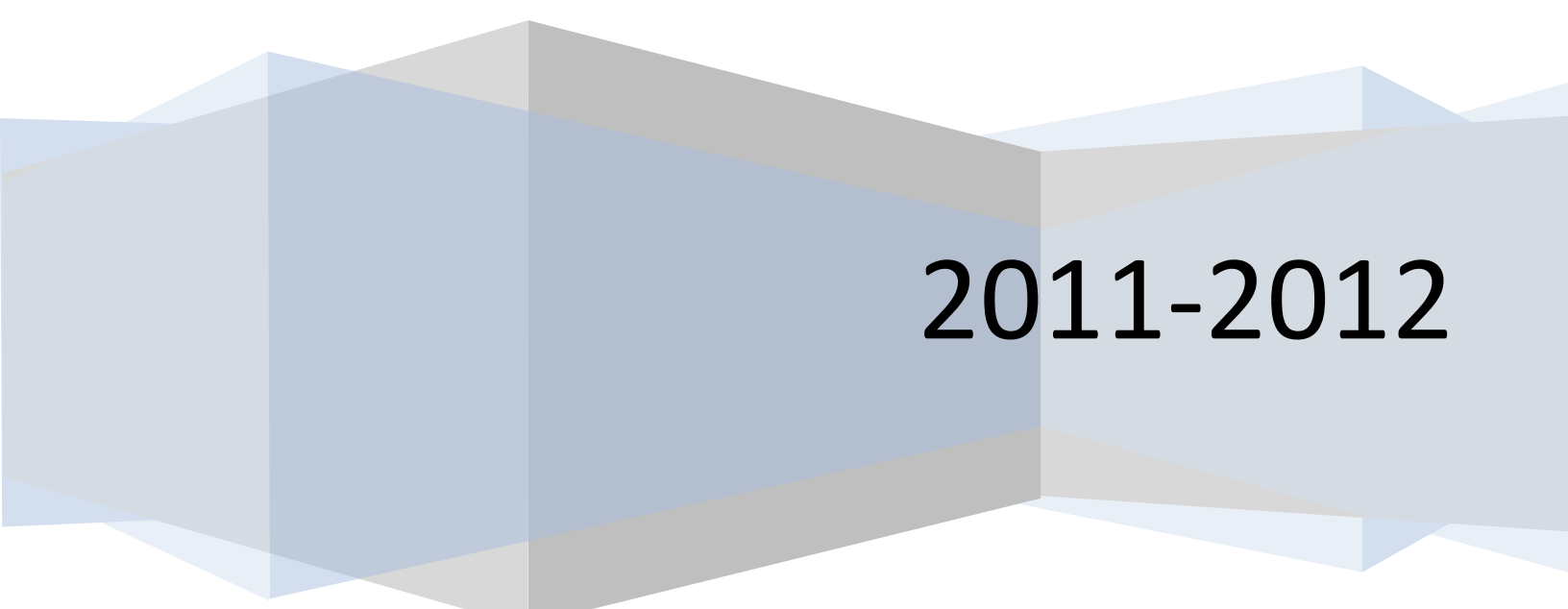


Πρότυπο Πειραματικό Λύκειο Αναβρύτων

**Αρχαία Ελληνική
Αρχιτεκτονική και
Μαθηματικά
Ομάδα 3-Ρυθμοί**

Καρναβάς Αντώνιος, Κατσίγιαννη Πηνελόπη,
Μανδηλαρά Ντένια, Σπυροπούλου Παυλίνα



2011-2012

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

Εισαγωγή	σελίδα 3
Ιστορία Τέχνης: Οι ρυθμοί της αρχαιότητας και η προέλευση τους.....	σελίδα 3-10
Εισαγωγή στην έννοια της χρυσής τομής	σελίδα 11-13
Η μαθηματική εξήγηση της χρυσής τομής	σελίδα 14-17
Η χρυσή τομή στην αρχαία ελληνική αρχιτεκτονική.....	σελίδα 18-19
Η χρυσή τομή και οι πυθαγόρειοι	σελίδα 20-21
Χρυσός αριθμός	σελίδα 21-22
Χρυσό ορθογώνιο	σελίδα 23
Βιβλιογραφία	σελίδα 24

ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Αρχιτεκτονικός Ρυθμός ονομάζεται μία τεχνοτροπία αρχιτεκτονικής που επικρατεί συνήθως σε μια ορισμένη ιστορική περίοδο. Η ανάπτυξη διάφορων αρχιτεκτονικών ρυθμών εξαρτάται κυρίως από: α) κλιματικούς, β) τεχνικούς, γ) θρησκευτικούς και δ) πολιτιστικούς παράγοντες. Αρχιτεκτονικοί ρυθμοί εντοπίζονται ήδη στην προϊστορία, με την προϊστορική αρχιτεκτονική, ενώ ως διαδικασία συνεχίζονται ακόμα και σήμερα. Η αρχαιοελληνική αρχιτεκτονική είναι μία από τις σπουδαιότερες που συναντώνται στην ιστορία του ευρωπαϊκού πολιτισμού, καθώς έγινε πρότυπο και έθεσε τις βάσεις για πολλούς άλλους αρχιτεκτονικούς ρυθμούς. Στην αρχαιότητα συναντώνται τέσσερις αρχιτεκτονικοί ρυθμοί: **ο Δωρικός, ο Ιωνικός, ο Κορινθιακός και ο Αιολικός**. Ακολουθεί η ανάλυση καθενός από τους παραπάνω ξεχωριστά.

A. Ιστορία Τέχνης: Οι ρυθμοί της αρχαιότητας και η προέλευση τους.

Αρχαϊκοί χρόνοι

➤ 1.Αιολικός Ρυθμός

Αιολικός ονομάζεται ο αρχιτεκτονικός ρυθμός που συναντάται κυρίως στον γεωγραφικό χώρο της Αιολίδας (=δηλαδή στον μικρασιατικό αιγιαλό από την Τροία έως τη Σμύρνη), καθώς και στο νησί της Λέσβου. Μάλιστα στη Λέσβο βρέθηκαν τα περισσότερα και σημαντικότερα μνημεία του αιολικού ρυθμού.

Δύο αιολικοί ναοί των Αρχαϊκών χρόνων έχουν εντοπισθεί και φυσικά ερευνηθεί στην ορεινή θέση της Κλοπεδής Λέσβου. Αυτοί ταυτίστηκαν με το ιερό του "Ναπαίου Απόλλωνος". Η πυκνότητα των κτισμάτων αιολικού ρυθμού αποδεικνύεται από τα αιολικά κιονόκρανα, που βρέθηκαν στην πόλη της Μυτιλήνης, στην Ερεσό και στην αγροτική περιοχή του παραδοσιακού οικισμού της Νάπης. Κτίσματα αιολικού ρυθμού φαίνεται πως ήταν διάσπαρτα σε ολόκληρη τη Λέσβο.

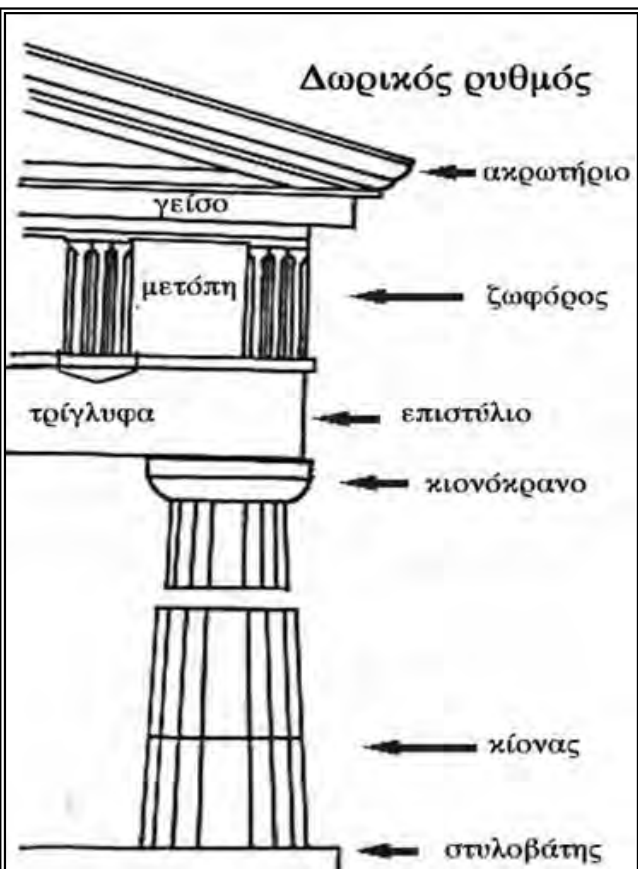
Ωστόσο, και στη μικρασιατική Αιολίδα εντοπίζονται απομεινάρια ναών αιολικού ρυθμού Αρχαϊκής εποχής. Στη Σμύρνη, στη Λάρισα του

Έρμου, καθώς και στην πόλη Νεάνδρια, νότια της Τροίας, η αρχαιολογική σκαπάνη έφερε στο φώς αρχιτεκτονικά λείψανα του ρυθμού αυτού. Στο Μουσείο της Κωνσταντινούπολης βρίσκεται ένα κιονόκρανο από μεγάλο αιολικό κτίσμα, που προέρχεται από το Κάστρο της Μυτιλήνης. Θα μπορούσαμε να πούμε πως ο αιολικός ρυθμός αποτέλεσε μια ιδιαίτερη έκφραση του ελληνικού πολιτισμού στον χώρο της Ανατολής. Τυπολογικά, πρόκειται για μια παραλλαγή του ιωνικού ρυθμού που έχει όμως σαν κύριο χαρακτηριστικό το κιονόκρανο. Ο ραδινός αιολικός κίονας ήταν αρράβδωτος, ενώ τη βάση του διακοσμούσαν πέταλα άνθους ή αστράγαλος πάνω από τη σπείρα. Το αιολικό κιονόκρανο από ορισμένους ερευνητές ονομάζεται πρωτοϊωνικό και φέρει δύο έλικες ανάμεσα στις οποίες σχηματίζεται ένα ανθέμιο. Στους οφθαλμούς των ελίκων υπήρχαν ένθετα λίθινα ή μεταλλικά κοσμήματα.

Το αιολικό κιονόκρανο δίνει την εντύπωση φυτικού σχηματοποιημένου κοσμήματος. Έχει επηρεαστεί από ανατολικά πρότυπα, ενώ είναι πολύ πιθανό να συμβόλιζε το «δέντρο

της ζωής». Αιολικά κιονόκρανα έχουν βρεθεί στη χερσόνησο της

Αλικαρνασσού στη Μικρά Ασία, στην Κύπρο, στη Θάσο, στη Δήλο, στην Πάρο, στην περιοχή Συκάμινο του Ωρωπού, στην Ακρόπολη, στην Αγορά και στον Κεραμεικό της Αθήνας. Ωστόσο, ως κόσμημα, το αιολικό κιονόκρανο με εγχάρακτη ή γραπτή απόδοση έγινε ο κανόνας στις επιστέψεις των επιτύμβιων στηλών της Αρχαϊκής περιόδου. Οι μεγάλοι αγγειογράφοι του 6ου αι. π.Χ. χρησιμοποίησαν το αιολικό κιονόκρανο ως διακοσμητικό στοιχείο στις μελανόμορφες παραστάσεις των αγγείων τους, κυρίως για να στολίσουν αρχιτεκτονικά μέλη και έπιπλα.



➤ **2.Δωρικός Ρυθμός** ονομάζεται στην αρχαία ελληνική αρχιτεκτονική ο ρυθμός εκείνος, που διακρίνεται για τη

λιτότητα, την αυστηρότητα και τη μνημειακότητά του.

Οι απαρχές του Δωρικού Ρυθμού υποστηρίζεται ότι βρίσκονται στο Άργος και στην Κόρινθο, που ήταν δύο από τα πιο σημαντικά δωρικά κέντρα κατά τη Γεωμετρική Περίοδο (8ος αιώνας).¹ Ωστόσο αρχιτεκτονικά κατάλοιπα ναών τόσο πρώιμης εποχής δεν έχουν σωθεί, κυρίως γιατί λογικά για την κατασκευή τους θα πρέπει να είχε χρησιμοποιηθεί ιδιαίτερα το ξύλο. Κύριο χαρακτηριστικό των κίωνων είναι η απουσία βάσης: οι κίονες στηρίζονται απευθείας στον στυλοβάτη.



¹ Pollit J. J., 1999, Η Τέχνη Στην Ελληνιστική Εποχή, Εκδόσεις ημ. Ν.

Τα κιονόκρανα είναι λιτά σε σχέση με τους άλλους δύο ρυθμούς. Αποτελούνται από δύο μέρη, τον "εχίνο" και τον "άβακα". Ο "άβακας" είναι το τετραγωνικής κάτοψης ανώτερο σημείο του κίονα στο οποίο στηρίζεται το επιστύλιο, ενώ ο "εχίνος" (αχινός) είναι το αμέσως κατώτερο σημείο χάρη στο οποίο γίνεται ομαλότερη η μετάβαση από τον "άβακα" στον κυρίως κίονα. Ένα ακόμη χαρακτηριστικό των δωρικών κίωνων είναι ότι οι αιχμές των ραβδώσεών τους είναι οξείες και όχι καμπύλες όπως στον Ιωνικό και στον Κορινθιακό ρυθμό. Ο θριγκός στους δωρικούς ναούς αποτελείται από το επιστύλιο, τα τρίγλυφα και τις μετόπες. Το επιστύλιο χαρακτηρίζεται από την απουσία διακοσμητικών στοιχείων με εξαίρεση μία λεπτή ταινία στο ανώτερο μέρος του, που αποτελεί συνέχεια της διακόσμησης των τριγλύφων που βρίσκονται ακριβώς από πάνω. Τα τρίγλυφα είναι τρία μακρόστενα και κάθετα λαξεύματα στο μάρμαρο. Το σχέδιό τους καθιερώθηκε ώστε να θυμίζει τα ξύλινα δοκάρια που στήριζαν τη στέγη των ναών. Γι' αυτόν τον λόγο, κάτω ακριβώς από το κάθε ένα βρίσκονται απομιμήσεις των καρφιών που συγκρατούσαν κάποτε τις ξύλινες δοκούς, που ονομάζονται "σταγόνες". Οι μετόπες βρίσκονταν ανάμεσα στα τρίγλυφα και ήταν είτε απλά τμήματα μαρμάρου είτε έφεραν γραπτές ή ανάγλυφες παραστάσεις. Κατά την αρχαιότητα, τα τρίγλυφα ήταν βαμμένα μπλε ενώ οι μετόπες κόκκινες.

➤ 3.ΙΩΝΙΚΟΣ ΡΥΘΜΟΣ

Ανάμεσα στους πέντε αρχαίους κλασικούς αρχιτεκτονικούς ρυθμούς και συγκεκριμένα μεταξύ του Δωρικού και του Κορινθιακού, κατατάσσεται και ο **Ιωνικός ρυθμός**.



Το Ερέχθειο στην Ακρόπολη των Αθηνών (νοτιοδυτική άποψη).

Οι ρυθμοί αυτοί διαφοροποιούνται ως προς τη ζωφόρο, τα κιονόκρανα καθώς και τις κιονοστοιχίες των αρχαίων κτισμάτων. Οι διαφορές ανάμεσα στον Μικρασιατικό Ιωνικό ρυθμό και τον Αττικό Ιωνικό ρυθμό εντοπίζονται στα διαφορετικά χαρακτηριστικά της βάσης του στύλου και της ζωφόρου. Εξάλλου σημαντικές παραλλαγές διαπιστώνουμε στη Ρωμαϊκή Ιωνική και στη Γερμανική Ιωνική.²

²http://el.wikipedia.org/wiki/%CE%99%CF%89%CE%BD%CE%B9%CE%BA%CF%8C%CF%82_%CF%81%CF%85%CE%B8%CE%BC%CF%8C%CF%82

Ανωδομή ναού ιωνικού ρυθμού

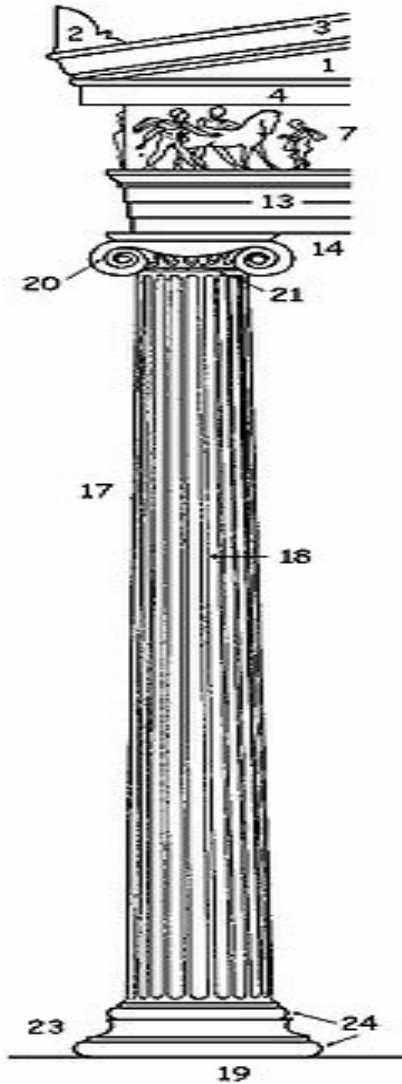


➤ Ιστορική εξέλιξη

Ο Ιωνικός ρυθμός πρωτοεμφανίστηκε στις αρχές του 6^{ου} π.Χ. αιώνα, στα παράλια της μικρασιατικής Ιωνίας, στα νησιά του Αιγαίου και στην Αττική.

Το όνομά του οφείλεται στους Ίωνες, οι οποίοι, μετά την κάθοδο των Δωριέων, μετατοπίστηκαν κυρίως στα ανατολικά, δηλαδή στα νησιά του Αιγαίου και στα δυτικά παράλια της Μικράς Ασίας, ενώ επικράτησαν στην περιοχή της Αθήνας .

Συγκρίνοντας τον Δωρικό με τον Ιωνικό ρυθμό, διαπιστώνουμε διάφορες μικρές παραλλαγές. Ωστόσο από τον 4^ο αιώνα π.Χ., ο Ιωνικός ρυθμός άρχισε να αποκτά τη δική του ταυτότητα και να διαφοροποιείται από τον Δωρικό.



Μελετώντας τον Ιωνικό ρυθμό όπως παρουσιάζεται στην Αθήνα, συναντούμε τις απαρχές του στις λίθινες κατασκευές των Κυκλάδων. Εντούτοις, αυτό που εντυπωσιάζει είναι το γεγονός πως οι διάφοροι αρχιτέκτονες είχαν τη δυνατότητα να αναπτύξουν με ελευθερία το δικό τους τοπικό στυλ, προσδίδοντας στο έργο τους εξαιρετική ιδιομορφία. Ως παραδείγματα μπορούμε να αναφέρουμε τις διαφορές που έχουν οι βάσεις στις κολώνες στη Σάμο και στην Έφεσο.

Αργότερα όμως ο Ιωνικός ρυθμός τυποποιήθηκε και διαδόθηκε. Η βάση του στύλου, όπως συναντάται στην Αθήνα, κατά τον ίδιο τρόπο εμφανίζεται και στη Μικρά Ασία, με τη μόνη διαφορά ότι εκεί συνδυάζεται με τον πλίνθο. Επίσης και η ζωφόρος, η οποία, αν και αρχικά εμφανίστηκε στα νησιά, εντούτοις στη συνέχεια διαδόθηκε στη Μικρά Ασία, διαμέσου της Αθήνας.³

ΕΙΚΟΝΑ: 1: τύμπανον 2: ακρωτήριο 3: γείσο καταέτιο 4: γείσο 7: ζωφόρος 13: επιστύλιο 14:κιονόκρανο 17: κίονας 18: αύλακες 19: στυλοβάτης 20: κοχλίας 21: αστράγαλος 23: σπείρα 24:δακτύλιοι.

³ www.wikipedia.gr

➤ 4. Κορινθιακός Ρυθμός

Ο Κορινθιακός ρυθμός είναι ένας από τους τρεις ρυθμούς της αρχαίας ελληνικής αρχιτεκτονικής. Οι κίονες χαρακτηρίζονται από κιονόκρανο που αποτελείται από υψηλό έχινο ("κάλαθος"), που περιβάλλεται από σειρές φύλλων ακάνθης και έλικες στις τέσσερις γωνίες. Μπορεί κάλλιστα να θεωρηθεί ως εξέλιξη του Ιωνικού λόγω αυτών των ελίκων. Ο ρυθμός αυτός αποτελεί τον πιο διακοσμητικό από τους τρεις και χρησιμοποιήθηκε κυρίως στους ρωμαϊκούς χρόνους με ποικιλία μορφών.

Σύμφωνα με τον Βιτρούβιο, εφευρέτης του Κορινθιακού κιονόκρανου ήταν ο γλύπτης Καλλίμαχος, που εμπνεύστηκε από ένα καλάθι που βρισκόταν στον τάφο ενός κοριτσιού στην Κόρινθο. Το καλάθι, όπου



Corinthian Capital with Entablature from the Pantheon at Rome.

ήταν τοποθετημένα τα παιχνίδια της, σκεπαζόταν από μία τετράγωνη πλάκα. Γύρω από το καλάθι είχαν φυτρώσει άκανθοι ακολουθώντας το σχήμα του. Έτσι γεννήθηκε το κορινθιακό κιονόκρανο σύμφωνα με τον μύθο. Ο πρώτος γνωστός Κορινθιακός κίονας βρισκόταν στον ναό του Επικούρειου Απόλλωνα (περίπου 420 π.Χ) στις Βάσσειες Φιγάλειας, που χτίστηκε από τον Ικτίνο, αρχιτέκτονα του Παρθενώνα. Ο κίονας αυτός βρισκόταν στο κέντρο της νότιας πλευράς της εσωτερικής κιονοστοιχίας του ναού. Πιθανότατα επρόκειτο για μία συμβολική απεικόνιση του ίδιου του Απόλλωνα, κάτι το οποίο δεν είναι πρωτοφανές.

Ο Κορινθιακός ρυθμός χρησιμοποιήθηκε σπάνια από Έλληνες, ενώ μεγάλη χρήση του παρατηρείται στους Ρωμαϊκούς Χρόνους. Στην Αθήνα, εξαιρετικό δείγμα Κορινθιακού ναού, αποτελεί ο Ναός του Ολυμπίου Διός (Ολυμπιεΐον) τον οποίο αποπεράτωσε ο αυτοκράτορας Αδριανός το 130 μ.Χ. Στα νεώτερα χρόνια, ο Κορινθιακός ρυθμός αγαπήθηκε ιδιαίτερα από τους αρχιτέκτονες της Αναγέννησης, αλλά και από τους νεοκλασικιστές.

B. Μέρος: Εισαγωγή στην έννοια της Χρυσής τομής.

Τι εννοούμε με τον όρο χρυσή τομή;

Τα μαθηματικά στην ευρεία έννοια τους περιλαμβάνουν πολλές φορές αρμονίες και συμμετρίες. Το αξιοσημείωτο είναι ότι αυτές οι αρμονίες υπάρχουν και στη φύση, στον άνθρωπο, αλλά ακόμα και σε έννοιες που πολλές φορές δεν ξέρουμε ότι έχουνε την οποιαδήποτε σχέση με τα μαθηματικά. Ένα πολύ ενδιαφέρον φαινόμενο που παρατηρείται στον χώρο αυτόν είναι η **Χρυσή Τομή**.

Στην πραγματικότητα, η Χρυσή Τομή Φ δηλώνει μία αναλογία. Ο ορισμός της είναι: **Η χρυσή τομή δίνει το σημείο που πρέπει να διαιρεθεί ένα ευθύγραμμο τμήμα, ώστε ο λόγος του ως προς το μεγαλύτερο τμήμα να ισούται με τον λόγο του μεγαλύτερου τμήματος ως προς το μικρότερο.** Η αναλογία αυτή είναι περίπου 1:1,618 και θεωρείται ότι δίνει αρμονικές αναλογίες. Αναλογίες δηλαδή που το μάτι μας, σαν να ήταν προγραμματισμένο εξαρχής έτσι, θεωρεί αρμονικές και όμορφες.

Πέρα όμως από τον περίεργο, θεμελιώδη ρόλο του στα μαθηματικά, τη γεωμετρία και τις μορφές της φύσης, το Φ έχει και μια άλλη, καθαρά ανθρώπινη ιδιαιτερότητα. Παρότι τα ανθρώπινα γούστα διακρίνονται για την υποκειμενικότητα τους, τα σχήματα τα οποία εμπεριέχουν στη γεωμετρία τους την αναλογία του Φ θεωρούνται τα πιο αρμονικά και ευχάριστα από αισθητικής άποψης για το ανθρώπινο μάτι (εγκέφαλο).

Πρέπει να καταλάβουμε πως είναι μία αναλογία που πεισματικά τηρείται στη φύση και επομένως δεν αποτελεί κατασκεύασμα της ανθρώπινης φαντασίας. Τη χρυσή τομή θεωρείται ότι εισήγαγε και υπολόγισε ο Πυθαγόρας (585 – 500 π.χ.). Από τότε έχει χρησιμοποιηθεί στην αρχιτεκτονική και στη ζωγραφική. Ο χρυσός λόγος ήταν γνωστός στους Πυθαγόρειους. Στο μυστικό τους σύμβολο, την πεντάλφα, ο χρυσός λόγος εμφανίζεται στις πλευρές τους αστεριού. Με βάση τον χρυσό λόγο δημιουργήθηκαν πολλά έργα της κλασικής εποχής, όπως ο Παρθενώνας, και της

αναγεννησιακής εποχής, όπως είναι ζωγραφικά έργα του Λεονάρντο ντα Βίντσι. Ακόμη και σήμερα χρησιμοποιείται για την απόδοση της αρμονίας σε έργα ή στην πλαστική χειρουργική για την ωραιοποίηση του ανθρώπινου προσώπου. Την αρμονικότητα που αποπνέουν τα διάφορα "χρυσά σχήματα" και οι "χρυσές τομές και αναλογίες" τη γνώριζαν και την αξιοποίησαν ποικιλοτρόπως οι αρχαίοι Έλληνες. Όμως το Φ το γνώριζαν και το αξιοποίησαν στα αρχιτεκτονήματα τους και αρκετοί άλλοι λαοί του αρχαίου κόσμου.

Αν και "ο χρυσός αριθμός" ήταν γνωστός από τη μακρινή αρχαιότητα, η αντιστοίχιση και ο συμβολισμός του με το ελληνικό γράμμα " Φ " ξεκίνησε από τον μαθηματικό Mark Barr, στις αρχές του 20ου μόλις αιώνα. Συμβολίζεται με το γράμμα Φ προς τιμήν του Φειδία, τον γνωστότερο γλύπτη της ελληνικής αρχαιότητας και τον σημαντικότερο της κλασικής περιόδου, ο οποίος ήταν ο πρώτος που έκανε χρήση του λόγου αυτού στα γλυπτά του.

Κάποιοι από τους μεγαλύτερους μαθηματικούς όλων των εποχών, από τον *Πυθαγόρα* και τον *Ευκλείδη*, τον μεσαιωνικό Ιταλό μαθηματικό *Leonardo of Pisa (Fibonacci)*, τον αναγεννησιακό αστρονόμο *Johannes Kepler* έως σημερινές επιστημονικές φυσιογνωμίες, όπως ο Καθηγητής της Οξφόρδης *Roger Penrose*, έχουν αφιερώσει αμέτρητες ώρες γύρω από αυτήν την αναλογία και τις ιδιότητές της. Όμως η γοητεία της χρυσής τομής δεν περιορίστηκε μόνο σε μαθηματικούς. Βιολόγοι, καλλιτέχνες, μουσικοί, ιστορικοί, αρχιτέκτονες, ψυχολόγοι και ακόμη και μυστικιστές, έχουν αναρωτηθεί και αναζητήσει τη βάση της πανταχού παρουσίας αυτής της έννοιας. Εν τέλει, η χρυσή τομή ενέπνευσε στοχαστές όλων των κλάδων, όπως κανένας άλλος αριθμός στην ιστορία των μαθηματικών.

Το περίεργο όμως είναι ότι το Φ ξεπροβάλλει και μέσα από τη γεωμετρία της ίδιας της (Φ)ύσης. Τα λεγόμενα χρυσά σπειροειδή, που βασίζονται στο Φ , απαντώνται στο σχήμα αρκετών σπειροειδών Γαλαξιών (**Spirals**). Ακόμα και στις σπείρες του DNA ή στα δακτυλικά

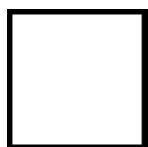
μας αποτυπώματα έχουν αποκαλυφθεί μαθηματικές σχέσεις που ενέχουν το Φ. Στο ανθρώπινο σώμα, ο χρυσός λόγος εντοπίζεται σε πολλές ανατομικές αναλογίες, τις οποίες παρατήρησε και κατέγραψε ο Leonardo da Vinci στον *Άνθρωπο του Βιτρουβίου*.

Το Φ έχει συσχετιστεί, περισσότερο ή λιγότερο άμεσα, με πλήθος φυσικών μεγεθών, φαινομένων ή ανθρώπινων εκδηλώσεων, όπως πχ με τις αναλογίες του ανθρώπινου σώματος, τις τροχιές των πλανητών γύρω από τον Ήλιο, τη γεωμετρική δομή των κρυστάλλων και τις χρωματικές και σχεδιαστικές αναλογίες έργων μεγάλων ζωγράφων όπως ο Leonardo da Vinci.

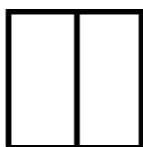
Κατά την Αναγέννηση, οι καλλιτέχνες άρχισαν να επιστρέφουν στα κλασσικά θέματα της αρχαιότητας για τις εμπνεύσεις τους και τις τεχνικές τους. Θα μπορούσαμε για παράδειγμα να αναφέρουμε τους Michelangelo (1475-1564) και Raphael (1483-1530), οι οποίοι επανέφεραν στις συνθέσεις τους τη χρυσή τομή. Ο ομφαλός διαιρεί το σώμα του *Δαβίδ* του Michelangelo σε λόγο χρυσής τομής. Σύμφωνα με τον McWhinnie, η δυναμική συμμετρία χρησιμοποιήθηκε με **τρεις τρόπους** στις εικαστικές τέχνες: ως υποκρύπτουσα δομή της οπτικής σύνθεσης, ως μέθοδος θεωρητικής αφαίρεσης και ως τρόπος κυβιστικής αφαίρεσης με παραστατικές εικόνες.

➤ Η μαθηματική εξήγηση της χρυσής τομής

Πρόβλημα 1. Σκοπός μας είναι να δημιουργήσουμε ένα **χρυσό ορθογώνιο**, δηλαδή ένα ορθογώνιο στο οποίο ο λόγος της μεγάλης του πλευράς προς τη μικρή να είναι ίσος με τον λόγο τη μικρής προς την διαφορά των πλευρών.



Βήμα 1.



Βήμα 2.



Βήμα 3.



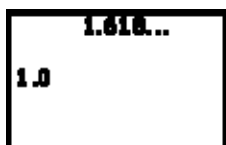
Βήμα 4.



Βήμα 5 (Χρυσό ορθογώνιο)

Σχήμα 1

Κατασκευή: Ας υποθέσουμε ότι μας έχει δοθεί το μήκος της μικρής πλευράς του ορθογώνιου. Ξεκινάμε την κατασκευή με ένα τετράγωνο πλευράς ίσης με την δοθείσα μικρή πλευρά του χρυσού ορθογώνιου το οποίο το διαιρούμε φέρνοντας τη διάμεσό του (Βήματα 1 και 2 στο Σχήμα 1) Με κέντρο το μέσο της μίας πλευράς και ακτίνα τη διαγώνιο του μισού τετραγώνου διαγράφουμε τόξο που τέμνει την προέκταση της πλευράς του τετραγώνου σε ένα σημείο (Βήματα 3 και 4). Αυτό το σημείο ορίζει το άλλο άκρο της μεγάλης πλευράς του χρυσού ορθογώνιου (Βήμα 5).



Σχήμα 2

Επαλήθευση: Το ορθογώνιο που κατασκευάσαμε είναι πράγματι χρυσό, δηλαδή αποτελεί λύση του προβλήματος 1.⁴ Για να απλουστεύσουμε την

⁴ Πανελλήνιο Δίκτυο Εκπαιδευτικών: www.sch.gr

επαλήθευση αυτή, ας υποθέσουμε ότι η μικρή πλευρά του (άρα και η πλευρά του τετραγώνου) έχει μήκος 1. Τότε, παρακολουθώντας την κατασκευή, βλέπουμε στο Βήμα 2 ότι η μισή πλευρά του τετραγώνου πρέπει να είναι $1/2$ ενώ από το Πυθαγόρειο Θεώρημα παίρνουμε πως η διαγώνιος του μισού τετραγώνου άρα και η ακτίνα του κύκλου (Βήματα 3 και 4) είναι $\sqrt{5}/2$. Άρα η μεγάλη πλευρά του χρυσού ορθογωνίου είναι $1/2 + \sqrt{5}/2 = 1,618...$ (δες σχήμα 2). Η συνθήκη λοιπόν που θα πρέπει να επαληθεύουν οι διαστάσεις του ορθογωνίου ώστε πράγματι να είναι χρυσό, σύμφωνα με το πρόβλημα 1, είναι (δεδομένου ότι η διαφορά των πλευρών του είναι $\sqrt{5}/2 - 1/2$):

$$\frac{\sqrt{5}/2 + 1/2}{1} = \frac{1}{\sqrt{5}/2 - 1/2}$$

που είναι απλό να δούμε ότι ισχύει.



Παρθενώνας: Χαρακτηριστικό παράδειγμα Αρχιτεκτονικής όπου συναντάται ο λόγος χρυσής τομής στις αναλογίες των πλευρών του.

Επειδή προφανώς τα χρυσά ορθογώνια είναι όμοια μεταξύ τους, πάντα ο λόγος της μεγάλης πλευράς προς τη μικρή πλευρά, θα είναι ο αριθμός $(\sqrt{5} + 1)/2$ που διεθνώς συμβολίζεται με το ελληνικό γράμμα Φ , το αρχικό του ονόματος του Φειδία, δημιουργού των γλυπτών του Παρθενώνα. Η πρόσοψη του Παρθενώνα, όπως φαίνεται και από τη φωτογραφία δίπλα, μπορεί νοητά να εγγραφεί σε ένα χρυσό ορθογώνιο, πράγμα που σημαίνει ότι ο λόγος των

διαστάσεών του είναι ο αριθμός Φ . Ο αριθμός αυτός ονομάζεται **λόγος χρυσής τομής**.

Διαίρεση τμήματος σε λόγο χρυσής τομής.

Το επόμενο πρόβλημα δικαιολογεί την εμφάνιση της λέξης «τομή» στην ορολογία μας, αφού μας ζητείται να διαιρέσουμε ένα τμήμα σε συγκεκριμένο λόγο.

Πρόβλημα 2. Βρείτε σημείο G που διαιρεί δοσμένο ευθύγραμμο τμήμα AB με τέτοιο τρόπο, ώστε ο λόγος του τμήματος προς το μεγάλο κομμάτι να είναι ίσος με το λόγο του μεγάλου κομματιού προς το μικρό. Δηλαδή,

$$\frac{AB}{AG} = \frac{AG}{GB}$$

Πριν προχωρήσουμε στην κατασκευή, να παρατηρήσουμε ότι το πρόβλημα αυτό είναι σε πλήρη αναλογία με το προηγούμενο πρόβλημα. Ουσιαστικά, η κατασκευαστική λύση του προβλήματος 2 θα ήταν και λύση και στο πρόβλημα 1, με τη διαφορά ότι θα ξεκινούσαμε με γνωστή τη μεγάλη πλευρά του χρυσού ορθογωνίου, και θα ζητούσαμε την κατασκευή της μικρής πλευράς.

Κατασκευή: Για να κατανοήσουμε την κατασκευή, καλό είναι όπως και πριν να απλουστεύσουμε το πρόβλημα: Αν θεωρήσουμε ότι το μήκος του AB είναι 1, τότε ουσιαστικά αυτό που κατασκευάζουμε (το AG), είναι ένα τμήμα μήκους $\frac{\sqrt{5}}{2} - 1/2$, που είναι απλό να δούμε πως είναι λύση της ζητούμενης αναλογίας του προβλήματος 2. Ας παρακολουθήσουμε λοιπόν την κατασκευή του $\frac{\sqrt{5}}{2} - 1/2$, βήμα προς βήμα:

Βήμα 1^ο: Στο άκρο B γράφουμε κάθετο ευθύγραμμο τμήμα μήκους ίσο με το μισό του αρχικού μας τμήματος AB. Έτσι σχηματίζεται ένα ορθογώνιο τρίγωνο.

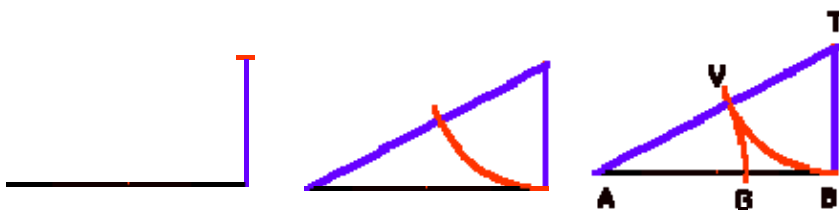
Βήμα 2^ο: Η υποτεινούσα έχει μήκος $\frac{\sqrt{5}}{2}$. Από αυτήν αφαιρούμε τμήμα μήκους 1/2.

Βήμα 3^ο : Το υπόλοιπο τμήμα της υποτείνουσας (το AV) είναι ίσο με το ζητούμενο τμήμα AG που έχει προφανώς μήκος $\frac{\sqrt{5}}{2} - 1/2$. Άρα, η αναλογία γίνεται:

$$\frac{AB}{AG} = \frac{1}{\frac{\sqrt{5}}{2} - 1/2}$$

Δηλαδή,

$$\frac{AB}{AG} = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} = \phi$$



Βήμα 1

Βήμα 2

Βήμα 3

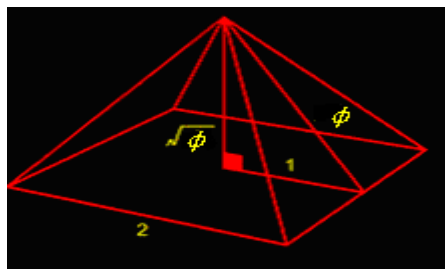
Σχήμα 3

Η παραπάνω κατασκευή συζητείται και στο βιβλίο της Γεωμετρίας του Λυκείου σαν ενδιάμεσο βήμα για την κατασκευή κανονικού δεκαγώνου. Υπάρχουν αρκετά γεωμετρικά σχήματα που συνδέονται άμεσα με τη χρυσή τομή, όπως είναι το κανονικό δεκάγωνο ή το κανονικό πεντάγωνο. Θα συζητήσουμε γι' αυτά στη συνέχεια και θα κάνουμε και ορισμένες ιστορικές αναφορές για την ιστορία τους όπου χρειάζεται.

➤ Η ΧΡΥΣΗ ΤΟΜΗ ΣΤΗΝ ΑΡΧΑΙΑ ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΑΡΧΙΤΕΚΤΟΝΙΚΗ

Γνωρίζουμε πως η πρόσοψη του Παρθενώνα είναι ένα χρυσό ορθογώνιο, ενώ είναι αλήθεια πως συναντάμε χρυσές σπείρες στα αρχαία ελληνικά κιονόκρανα.

Θα δώσουμε μερικά παραδείγματα ακόμα, ξεκινώντας από τη μεγάλη πυραμίδα, τη πυραμίδα του Χέοπτα στην Αίγυπτο. Οι αρχαίοι Αιγύπτιοι ήταν οι πρώτοι που χρησιμοποίησαν τα Μαθηματικά στην τέχνη. Μάλιστα θεωρείται σχεδόν σίγουρο από πολλούς μελετητές το γεγονός ότι οι αρχαίοι Αιγύπτιοι θεοποιούσαν τη χρυσή τομή.⁵ Αν νοητά κόψουμε κάθετα τη μεγάλη πυραμίδα της Γκίζας, θα πάρουμε ένα ορθογώνιο τρίγωνο, το ονομαζόμενο Αιγυπτιακό Τρίγωνο. Ο λόγος του ύψους της παράπλευρης επιφάνειας της πυραμίδας (υποτείνουσα του τριγώνου) προς την απόσταση της πλευράς από το κέντρο (μισή πλευρά της βάσης) είναι 1,61804..., που διαφέρει από τον αριθμό Φ στο πέμπτο δεκαδικό ψηφίο. Αυτό σημαίνει ότι αν η πλευρά της βάσης είναι 2 μονάδες μήκους, τότε το ύψος ενός από τα τέσσερα τρίγωνα που απαρτίζουν την παράπλευρη επιφάνεια της πυραμίδας είναι Φ , ενώ το ύψος της πυραμίδας είναι $\sqrt{\Phi}$, όπως φαίνεται και στο παρακάτω σχεδιάγραμμα.



Πυραμίδα της Γκίζας.

⁵Εδώ πρέπει να επισημανθεί ότι μολονότι στο ύψος και τη βάση της πυραμίδας του Χέοπτος υπάρχει στενή αντιστοιχία με τον Φ , με δυσκολία μπορεί να στηρίξει κανείς πως οι αρχαίοι Αιγύπτιοι εκείνη την εποχή, λόγω των περιορισμένων θεωρητικών γεωμετρικών τους γνώσεων, γνώριζαν τον λόγο Φ . Ο αρχιτέκτονας του έργου μάλλον ξεκίνησε από την απαίτηση, η κλίση να εκφράζεται με ρητό αριθμό, ώστε να γίνεται



Καθεδρικός
Chartres

Φυσικό είναι μάλιστα το γεγονός ότι ο λόγος της χρυσής τομής είχε τεράστια επίδραση σε όλον τον ελλαδικό χώρο. Για την κατασκευή των κτιρίων τους και τις διακοσμήσεις που έκαναν οι αρχαίοι Έλληνες χρησιμοποιούσαν τη χρυσή τομή. Το πιο χαρακτηριστικό κατασκεύασμα των αρχαίων Ελλήνων με βάση τις χρυσές αναλογίες είναι ο Παρθενώνας. Μάλιστα μπορούμε να εγγράψουμε τον Παρθενώνα σε ένα χρυσό ορθογώνιο, αλλά και αν επιχειρήσουμε να το χωρίσουμε σε τετράγωνα και άλλα μικρότερα χρυσά ορθογώνια, θα διαπιστώναμε ότι και άλλα τμήματά του είναι τοποθετημένα έτσι ώστε να πληρούνται πολλές χρυσές αναλογίες.

Επίσης κατά την εποχή του Μεσαίωνα, τα εξωτερικά όσο και τα εσωτερικά των κτιρίων ήταν φτιαγμένα και διακοσμημένα με βάση τις χρυσές αναλογίες. *Η χρυσή τομή ή θεία αναλογία* έγινε διάσημη τον μεσαίωνα κυρίως με το έργο του μαθηματικού Λούκα Πατσιόλι, που εικονογραφήθηκε με 60 σχέδια από τον Λεονάρντο ντα Βίντσι. Ο ντα Βίντσι, όπως λέγεται, σχεδίασε με βάση το χρυσό ορθογώνιο και τη χρυσή αναλογία τα αριστουργήματά του: *Μόνα Λίζα*, *Ευαγγελισμός*, *Άγιος Ιερώνυμος* κ.ά.

Η αναλογία της χρυσής τομής επηρέασε και τον διάσημο Γάλλο αρχιτέκτονα του 20^{ου} αιώνα Le Corbusier, που διατύπωσε το σύστημα **modulor** (κλίμακα αναλογιών του ανθρώπινου σώματος, όπου ο ομφαλός διαιρεί το ιδανικό ανθρώπινο σώμα σε λόγο της χρυσής τομής) και ο οποίος σχεδίασε πολλά κτίρια με βάση τον χρυσό λόγο. *Η δέκατη αναλογία είναι η αρχή του σχηματισμού της προσθετικής ακολουθίας Fibonacci, στην οποία κάθε αριθμός είναι το άθροισμα των δύο προηγούμενων: 1,1,2,3,5,8,13,21,34,55,89,144... Οι λόγοι δύο τυχαίων διαδοχικών όρων μετά τον πέμπτο προσεγγίζουν τον λόγο της χρυσής τομής: 1,618 133 98875.....*

ευκολότερη η κατασκευή των λίθων των σκαλοπατιών του έργου. (βλέπε, βιβλιογραφία [17], σελ. 234-235, και [18])

➤ ΟΙ ΠΥΘΑΓΟΡΕΙΟΙ ΓΝΩΡΙΖΑΝ ΓΙΑ ΤΗ ΧΡΥΣΗ ΤΟΜΗ;

Οι Πυθαγόρειοι είχαν την πεποίθηση ότι οι αριθμοί αποτελούν ουσιαστικά το μέσο για την εξήγηση του σύμπαντος, αφού «οι αριθμοί είναι η ουσία των όντων» και ότι οι αναλογίες κυριαρχούν και διέπουν την εκ του χάους δημιουργία της μορφής του κόσμου. Η πίστη αυτή τους οδήγησε στη μελέτη των αναλογιών που εμφανίζονται στη φύση και στους ζωντανούς οργανισμούς. Η μελέτη των Πυθαγορείων σχετικά με τους αριθμούς και τις ιδιότητές τους βοήθησε στο να θεμελιωθεί η Αριθμητική ή όπως την ονομάζουμε σήμερα **θεωρία των αριθμών**. Οι μεσότητες, δηλαδή οι αναλογίες που χρησιμοποιήθηκαν από τους Πυθαγόρειους στα Μαθηματικά και τη Μουσική, ήταν συνολικά δέκα. Η ανακάλυψη των τριών πρώτων αποδίδεται στον ίδιο τον Πυθαγόρα (αριθμητικός, γεωμετρικός και αρμονικός μέσος). Άλλες τρεις πιστεύεται ότι ανακάλυψαν οι μαθητές του, Αρχύτας και Ίππασσος ή όπως άλλοι πιστεύουν ο Εύδοξος, μαθητής του Αρχύτα, κορυφαίος μαθηματικός στην Ακαδημία του Πλάτωνα. Οι άλλες τέσσερις μεσότητες προστέθηκαν από τους Πυθαγόρειους Μυονείδη και Ευφράνωρα. Η δέκατη αναλογία είναι σήμερα γνωστή με το όνομα *χρυσή τομή*, την οποία εισήγαγε και υπολόγισε ο Πυθαγόρας. Το όνομα «χρυσή τομή», που της το έδωσε ο *Johannes Kepler*, σχετίζεται με το πρόβλημα της διαίρεσης ευθύγραμμου τμήματος σε μέσο και άκρο λόγο:

«Να χωρίσετε ένα ευθύγραμμο τμήμα $AB = \lambda$ σε δύο άνισα μέρη $AT = \chi$ και $TB = \lambda - \chi$, ώστε ο λόγος του AB προς το μεγαλύτερο μέρος AT να είναι ίσος με τον λόγο του AT προς το μικρότερο τμήμα » .

Η θετική ρίζα της εξίσωσης $\lambda / \chi = \chi / \lambda - \chi$ είναι η

$$\chi = \frac{\sqrt{5}}{2} - 1/2,$$

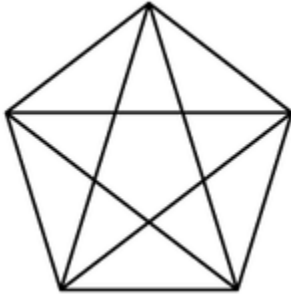
από την οποία προκύπτει ο λόγος των τμημάτων AB και AT ,

$$\lambda / \chi = \frac{\sqrt{5}}{2} + 1/2 \quad \text{-περίπου ίσος με } 1,61803... = \Phi.$$

Ο λόγος αυτός είναι ίσος με τον λόγο της διαγωνίου προς την πλευρά κανονικού πενταγώνου . Οι διαγώνιοι ενός κανονικού πενταγώνου

σχηματίζουν ένα αστεροειδές πεντάγωνο, την πεντάλφα, που ήταν διακριτικό γνώρισμα της Πυθαγόρειας Σχολής . Σ' αυτό ισχύει:

$$AD/AG = \Phi, \quad AG/AB = \Phi .$$

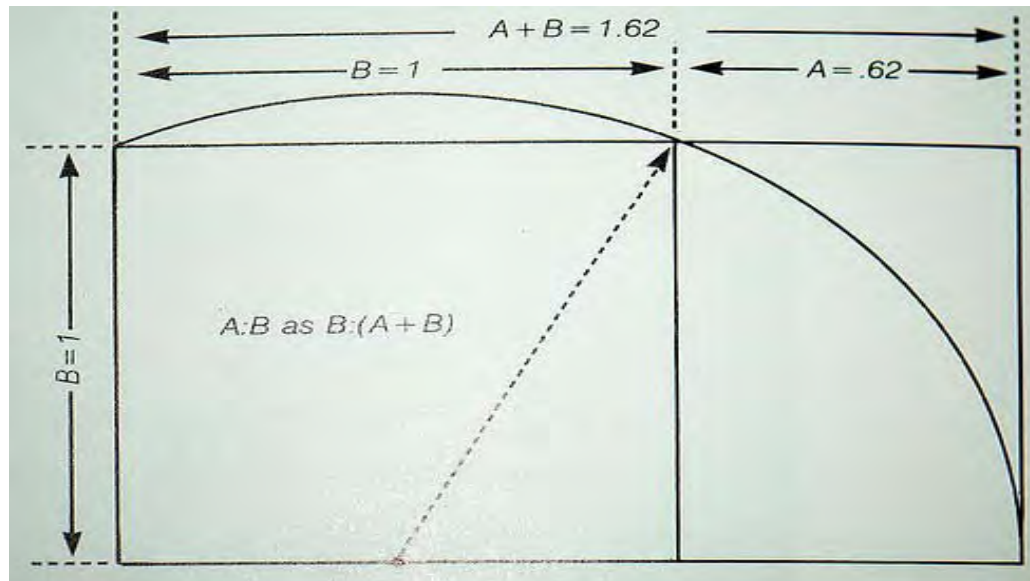
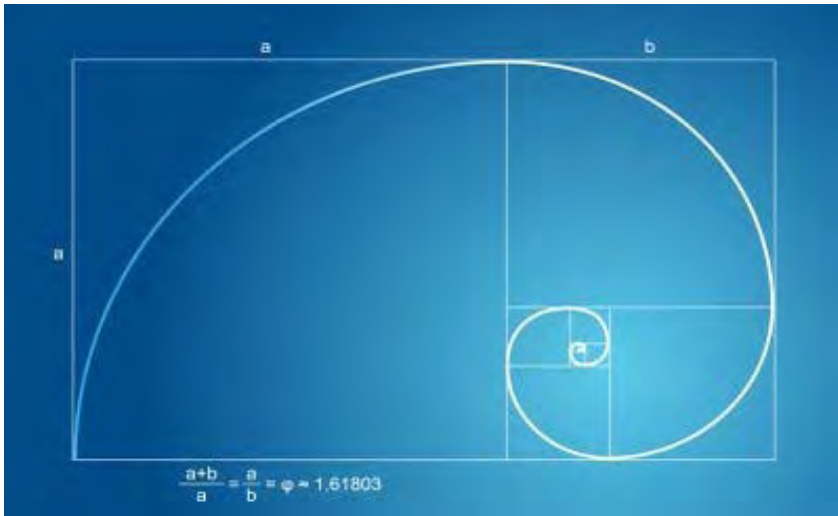


Ἡ Πεντάλφα τῶν Πυθαγορείων

➤ Ο ΧΡΥΣΟΣ ΑΡΙΘΜΟΣ

Ο χρυσός αριθμός ή θεία αναλογία είναι μια πολύ ιδιόμορφη αναλογία, που απαντά σε ένα ορθογώνιο παραλληλόγραμμο με επίσης ιδιόμορφες ιδιότητες, τι οποίο είναι γνωστό ως «**χρυσό ορθογώνιο**». Ένα ορθογώνιο λέγεται χρυσό αν ο λόγος της μεγαλύτερης πλευράς του α προς τη μικρότερη πλευρά του β ισούται με το Φ . Αν σχηματίσουμε ένα ορθογώνιο με πλευρές β , $\alpha - \beta$ τότε προκύπτει ένα ακόμη χρυσό ορθογώνιο. Αν συνεχίσουμε με την ίδια διαδικασία, θα παραγάγουμε διαρκώς μικρότερα χρυσά ορθογώνια το ένα μέσα στο άλλο. Αν σε καθένα από αυτά σχεδιάσουμε ένα τεταρτημόριο του κύκλου, θα προκύψει μια λογαριθμική σπείρα, η οποία και αυτή εμφανίζεται συχνά στη φύση, στο κέλυφος των μαλακίων, όπως ο ναυτίλος, και αλλού.





Ο ναυτίλος

➤ ΤΟ ΧΡΥΣΟ ΟΡΘΟΓΩΝΙΟ

Σύμφωνα με τη χρυσή τομή κατασκευάστηκαν πολλά γνωστά κτίσματα, όπως το αέτωμα του Παρθενώνα, η Επίδαυρος και κάποιες από τις πυραμίδες του κόσμου. Τέλος, πρέπει να επισημάνουμε πως ο χρυσός αριθμός έπαιξε και παίζει έναν πολύ σημαντικό ρόλο στη ζωή μας διότι πολλοί μελετητές εντόπισαν τον χρυσό αριθμό στον ανθρώπινο σκελετό, ακόμη και στο αίμα, και ισχυρίστηκαν πως το σώμα μας κατασκευάστηκε έχοντας ως βάση τον εν λόγω αριθμό, άποψη που ανάγεται στους Πυθαγορείους και τον Πλάτωνα και υιοθετείται μέχρι και σήμερα.

Βιβλιογραφία

1. Μαθηματικά Γ΄ Γυμνασίου, Βιβλίο Εκπαιδευτικού
2. Γεωμετρία Β΄ Λυκείου, ΟΕΔΒ
3. Λαμπέρτο Γκαρσία Δελσίδ, *Το χαμόγελο του Πυθαγόρα*
4. www.wikipedia.gr
5. http://www.matia.gr/library/ebook02_09/002.html
6. Ψηφιακή Εγκυκλοπαίδεια Μείζονος Ελληνισμού:
<http://www.emg.gr/asiaminor/Forms/fLemmaBodyExtended.aspx?lemmaID=6873>
7. Λεξικό Γ. Μπαμπινιώτη 1998
8. Gottfried Gruben, 2001, *Ιερά και ναοί των αρχαίων Ελλήνων*, Hirmer, Μόναχο
9. Klaus Herrmann, 1996, *Σημειώσεις Για Την Ιωνική Αρχιτεκτονική Στην Πελοπόννησο*, Zabern, Μόναχο
10. Βασίλης Λαμπρινουδάκης, 1996, *Παρατηρήσεις Σχετικά Με Τη Γένεση Των Ιωνικών Μορφών Θριγκού*, Zabern, Μόναχο
11. Μανώλης Κορρές, 1996, *Αρχαία Αρχιτεκτονική Στην Ελλάδα*, Zabern, Μόναχο
12. Orhan Bingöl, 1990, *Mitteilungen des Deutschen Archäologischen Instituts*, Abteilung, Istanbul
13. Heiner Knell, 1988, *Ελληνική Αρχιτεκτονική: Αρχές*, Wiss Buchges, Darmstadt
14. Wolfgang Müller-Wiener, 1988, *Δομές Στην Αρχαία Ελληνική Αρχιτεκτονική*, C.H. Beck, Μόναχο
15. Περιοδικό Ευκλείδη Γυμνασίου, Ελληνική Μαθηματική Εταιρεία
16. Πανελλήνιο Δίκτυο Εκπαιδευτικών: www.sch.gr

17. Δημήτρης Τσιμπουράκης, *Η Γεωμετρία στην Αρχαία Ελλάδα*, Ατραπός, 2004
18. Fernando Corbalan, *Η Χρυσή Τομή- Η μαθηματική γλώσσα της ομορφιάς*. 4π, 2011
19. Περιοδικό Focus – *‘Ανακαλύπτοντας τη γνώση και τον κόσμο- Ο Αριθμός φ’*. 23/7/2008